Решения на Домашно №1 по Дискретни Структури на специалност Компютърни науки, 2 поток, зимен семестър 2020/2021г.

Задача 1, решение 1: Ще докажем твърдението по индукция по n. Твърдим, че за всяко нечетно n е вярно, че за всяко валидно разполагане на n каубои в равнината съществува поне един каубой, по когото не стреля никой.

Базата е за $n = 1$. Твърдението е тривиално вярно: единственият каубой не стреля по никого, така че никой не стреля по него.

Да допуснем, че твърдението е вярно за някое нечетно n. Да разгледаме произволно валидно разполагане на $n + 2$ каубоя. Без ограничение на общността, нека $d(1, 2) < d(i, j)$ за $1 \leq i, j \leq n+2$, където $i \neq j$ и $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$. Това означава, че каубои 1 и 2 са най-близко разположената двойка и те се стрелят взаимно. Разглеждаме два случая, взаимно изключващи се и изчерпателни. Нека $d(1, 2) = k$.

Първи случай: $d(1, i) > k$ за всяко $i > 2$ и $d(i, 2) > k$ за всяко $i > 2$. Това означава, че нито един каубой i за $i > 2$ не стреля по някой от 1 и 2. Разглеждаме само каубои 3, …, $n + 2$. Те са n на брой, валидно разположени и съгласно индуктивното предположение поне за един от тях е вярно, че никой от останалите не стреля по него.

Втори случай: $d(1, i) < k$ за поне едно $i > 2$ или $d(i, 2) < k$ за поне едно $i > 2$. Съгласно закона на Де Морган и правилата на предикатната логика, това е точно негацията на условието от първия случай. БОО, нека $d(1, i) < k$ за поне едно $i > 2$. Но тогава е вярно, че поне един каубой x от $\{3, \ldots, n + 2\}$ не стреля по каубой от $\{3, \ldots, n + 2\}$ (понеже x стреля по 1).

Тогава съществува каубой от $\{3, \ldots, n+2\}$, по когото никой не стреля. Това следва от факта, че функция $f : A \to A$ където A е крайно множество е инекция тстк е сюрекция. В случай, релацията "x стреля по y" е функция с домейн и кодомейн крайното множество от каубоите. Във втория случай на доказателството, тя не е инекция, понеже върху поне един каубой измежду 1 и 2 се стреля от повече от едно място. Тогава тя не е и сюрекция; ерго, по някого не се стреля.

Задача 1, решение 2: Разглеждаме n каубоя, произволно, но валидно разположени. Нека множеството от тях е A. Разглеждаме релацията $R \subseteq A \times A$, дефинирана така: xRy тстк x стреля по y. Релацията е антирефлексивна, понеже никой не стреля по себе си, и не е транзитивна, понеже, ако x стреля по y и y стреля по z, то не е вярно, че x стреля по z.

Ще докажем, че в тази релация единствените контури са с дължина 2; тоест, с два елемента и са от вида x, y, x, което означава, че x и y се стрелят взаимно. Да допуснем противното: съществува контур с дължина $k \geq 3$. БОО, нека контурът е $1, 2, \ldots, k, 1$. С други думи, 1 стреля по 2, 2 стреля по 3, и така нататък, $k - 1$ стреля по k и k стреля по 1.

Щом 1 стреля по 2 и 2 не стреля по 1, а по 3, то $d(1, 2) < d(2, 3)$. Щом 2 стреля по 3 и 3 не стреля по 2, а по 4, то $d(2, 3) < d(3, 4)$. И така нататък. Щом $k - 1$ стреля по k и k не стреля по $k-1$, а по 1, то $d(k-1,k) < d(k,1)$. Дотук имаме неравенства $d(1,2) < d(2,3) < \cdots < d(k-1,k) < d(k,1)$. Релацията $<$ обаче е транзитивна, така че следва $d(1,2) < d(k,1)$.

От друга страна обаче, щом 1 стреля по 2, а не по k, трябва да е вярно, че $d(1,2) > d(k,1)$. Получихме противоречие: хем $d(1,2) < d(k,1)$, хем $d(1,2) > d(k,1)$.

Полученото противоречие влече, че допускането е невярно. Тогава единствените контури са с дължина 2. Но тогава има поне един каубой, който не е участник в контур, понеже общият брой на каубоите n е нечетен и няма как да разбием множеството от каубоите на двойки.

Разглеждаме произволен каубой x, който не е в контур. Ако никой стреля по x, доказателството е готово. Ако по x стреля y, то разглеждаме y. y не е в контур. Ако по y не стреля никой, доказателството е готово. Ако по y стреля z, то разглеждаме z. z не е в контур. И така нататък. По този начин, започвайки от x, строим верига "назад": верига, завършваща с x. В тази верига повтаряне на каубои не може да има, защото нито един от тях не участва в контур; ако имаше повтаряне, щеше да е вярно, че някои от тах са в контур. Щом няма повтаряне и каубоите са краен брой, рано или късно ще стигнем до каубой, по когото никой не стреля. Това доказателство като идея повтаря доказателството на факта, че в частична наредба над краен домейн има поне един минимален елемент.

Задача 2: Първо, нека се убедим, че за произволна редица от реални числа $a_1, a_2, ...a_k$ важи неравенството $\sum_{i=1}^{k-1} |a_{i+1} - a_i| \geq |a_k - a_1|$. Правим индукция по k. Базата при $k = 2$ е очевидна. Допускаме, че за някое k, за всяка редица от k реални числа е вярно: $\sum_{i=1}^{k-1} |a_{i+1} - a_i| \geq |a_k - a_1|$ и разглеждаме твърдението за редица $a_1, a_2, ...a_{k+1}$.
$\sum_{i=1}^{k} |a_{i+1} - a_i| = \sum_{i=1}^{k-1} |a_{i+1} - a_i| + |a_{k+1} - a_k| \geq |a_k - a_1| + |a_{k+1} - a_k| \geq |a_{k+1} - a_1|$.
Като първото неравенство е от индукционното ни предположние, а второто е просто неравенство на триъгълника. Твърдението е доказано.
Може да се върнем към оригиналната задача. Нека за прозволно нареждане въведем следното означение: $s_1 = 1, s_i =$ индекса на човека стоящ отдясно на човека с индекс s_{i-1}. Знаем, че за някое $k \leq n$, $s_k = n$ и освен това $s_{n+1} = 1$.
Ако означим общия дискомфорт с D, получваме следното:
$D = \sum_{i=1}^{n} |h_{s_i} - h_{s_{i+1}}| = \sum_{i=1}^{k-1} |h_{s_i} - h_{s_{i+1}}| + \sum_{i=k}^{n} |h_{s_i} - h_{s_{i+1}}| \geq |h_{s_1} - h_{s_k}| + |h_{s_k} - h_{s_1}| = 2(h_n - h_1)$. Като първото неравенство следва от твърдението, което доказахме по-рано. Намерихме долна граница за общия дискомфорт, сега остава да намерим нареждане, при което тя се достига. Едно такова нареждане е например $s_i = i$ за всяко $1 \leq i \leq n$.

Задача 3: $(a,b)R(c,d) \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Последната еквивалентност е в сила, понеже сме се ограничили в множеството на целите **положителни** числа. Директно се проверява че R е симетрична, рефлексивна и транзитивна.
Първо, лесно се забелязва, че множеството от класовете на еквивалентност E е безкрайно, понеже $(\forall p, q \in \mathbb{N}\ p \neq q \rightarrow ((1,p),(1,q)) \notin R)$. От друга страна пък от $|E| <= |R|$, $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ - изброимо следва, че R и E са изброими. Можем да заключим че можеството от класовете на еквивалетност на R е изброимо безкрайно.

Задача 4: а) Нека дефинираме функцията $t : S \to \mathbb{N}$
$t(x) =$ най-малкото n, за което $f^n(x) = x$. Първо трябва да докажем, че $\forall x \in S\ t(x)$ има стойност. За произволно $x \in S$, разписвайки редицата $x, f(x), f^2(x), ...f^k(x)$ в някакъв момент ще стигнем до повторение(*това следва от принципа на Дирихле*). Нека първото повторение е станало при $f^k(x)$ и $f^k(x) = f^q(x)$ за някое $q < k$
Ако допуснем че $q > 0$, от $f^k(x) = f^q(x) \to f(f^{k-1}(x)) = f(f^{q-1}(x))$ и f инекция следва, че $f^{k-1}(x) = f^{q-1}(x)$, което е в противоречие с това че $f^k(x) = f^q(x)$ е първото повторение. Следователно $q = 0$, $f^k(x) = f^0(x) = x$ и $t(x) = k$. Лесно се забелязва, че $\forall k \in \mathbb{N}\ f^{kt(x)}(x) = x$. Тогава, ако с l означим най-малкото общо кратно на елементите в множеството $T = \{t(x) \mid x \in S\}$ е ясно, че $\forall x \in S\ f^l(x) = x \to f^l = I \to f^{l-1} = f^{-1}$, където с I сме означили функцията идентитет.

б) функцията f дефинирана по следния начин върши работа:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 1, \\ 2, & \text{ако } x = 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{ако } \exists k \in \mathbb{N}\ 2^k = x \\ x + 1, & \text{във всички други случаи} \end{cases}$$