Контролна работа (упражнения, вариант 3) по ДАА, 3.04.2013г.

Име: __________________________________, ФН:______, Спец./курс:________

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	14	14	10	12	50

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$\binom{2n}{n}, \qquad \lg((n!)^n), \qquad \lg(n)\binom{n}{2}, \qquad (\sqrt{17})^n, \qquad (\sqrt{n})^5 + \lg(n!), \qquad \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i}$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$ б) $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n^2$

в) $T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n^2}$ г) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n$

Задача 3 В масив A са записани числата $15, 5, 11, 8, 7, 6, 9, 6$. Пирамида ли е масивът A и ако не, защо? Ако A е пирамида с дефект, как ще изглежда масивът след поправяне на дефекта ?

Задача 4 Намерете сложността на следния алгоритъм:

```
Easy3(n: integer)
  i ← 1; j ← 1
  while i ≤ n do
      j ← j + i
      if j > n
          j ← 1
          i ← i + 1
```

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \dots f_6$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации (f_1 оценяме чрез формула на Стирлинг):

$$f_1 = \binom{2n}{n} = \Theta(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}) = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$$
$$f_2 = \lg((n!)^n) = n\lg(n!) = n\Theta(n\lg n) = \Theta(n^2 \lg n)$$
$$f_3 = \lg n \binom{n}{2} = \lg n \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2 \lg n)$$
$$f_5 = (\sqrt{n})^5 + \lg(n!) = n^{2.5} + \Theta(n \lg n) = \Theta(n^{2.5})$$
$$f_6 = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i} = n^2 \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i} = n^2\Theta(\ln(n^2)) = n^2\Theta(2\ln(n)) = \Theta(n^2 \lg n)$$

Очевидно f_1 и f_4 имат експоненциален растеж, останалите – полиномиален. За f_1 и f_4 сравняваме основите ($4 < \sqrt{17}$, делителя на f_1 $\sqrt{n}$ е полиномиален, не влияе съществено и намаля растежа ѝ), за f_2, f_3, f_5 и f_6 сравняваме степента на полинома, при равенство множителя $\lg n$.

Така получаваме наредбата:

$$f_2 = \Theta(n^2 \lg n) \asymp f_3 \asymp f_6 \prec f_5 = \Theta(n^{2.5}) \prec f_1 = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}}) \prec f_4 = (\sqrt{17})^n$$

Задача 2 Случаи а) и б) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

За а) пресмятаме $k = \log_b a = \log_3 4$ и сравняваме $n^k = n^{\log_3 4}$ с $f(n) = n$. От $\log_3 4 > 1$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{\log_3 4 - \varepsilon} \succ n$. Попадаме в първи случай на Мастър теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$.

За б) пресмятаме $k = \log_b a = \log_3 4$ и сравняваме $n^k = n^{\log_3 4}$ с $f(n) = n^2$. От $\log_3 4 < 2$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $n^{\log_3 4 + \varepsilon} \prec n^2$. Попадаме в трети случай на Мастър теоремата, търсим константа $0 < c < 1$, такава че да е вярно неравенството $cn \geq 4(n/3)^2$. Неравенството е вярно за $c > 4/9$, следователно $T(n) = \Theta(n^2)$.

Рекурентното отношение в) можем да решим със заместване – след $n-1$ замествания получаваме $T(n) = T(0) + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{2^2} + 1 = T(0) + \Theta(1)$, тъй като от анализа е известно, че редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ е сходящ. Следователно $T(n) = \Theta(1)$.

Опростяваме г) като извадим равенствата, дефиниращи $T(n)$ и $T(n-1)$:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n$$
$$T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + n - 1$$

Получаваме $T(n) - T(n-1) = T(n-1) + 1$ или $T(n) = 2T(n-1) + 1$, което решаваме със заместване – след $k-1$ замествания получаваме $T(n) = 2^k T(n-k) + 1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k T(n-k) + 2^k - 1$. При $k = n$ достигаме до решението $T(n) = 2^n T(0) + 2^n - 1 = \Theta(2^n)$.

Задача 3 С директна проверка установяваме, че елементите на масива $A[4] = 8 > A[2] = 5$ и $A[5] = 7 > A[2] = 5$ нарушават пирамидалното свойство и $A[4],\ A[5]$ са синове на $A[2]$. След размяната на $A[2]$ с по-големия син $A[4]$ дефектът се премества надолу. Сега е нарушено пирамидалното свойство за $A[8] = 6 > A[4] = 5$. Разменяме ги и получаваме масива $15, 8, 11, 6, 7, 6, 9, 5$, който е пирамида.

Задача 4 Забелязваме, че j приема последователно стойности $1, 1+i, 1+2i, 1+3i \dots 1+\lceil \frac{n}{i} \rceil i$, след което сработва проверката на ред 4 и тази поредица за j се повтаря, но за стойност на i, увеличена с единица. Следователно ред 6 ще се изпълни n пъти, но за всяко преминаване през редове 5-6 цикълът *while* ще премине $\Theta(\frac{n}{i})$ пъти през ред 3. Оттук сложността на програмата е $\Theta(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}) = \Theta(n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}) = \Theta(n \lg n)$.