Контролно по ДАА, Специалност КН, група 1, 04.04.2013 г.

Забележка: Ако някоя задача е решена по-друг начин ще бъде оценявана по разлина скала.(Например ако 2-та задача е направена без полагане и е правилна тези 3 точки ще се разпределят върху остатъка от задачата)

(15 точки) 1 Задача. Подредете функциите по асимптотично нарастване:

$$\sum_{i=1}^{lg(n!)} 2^{n^2}, \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}, \quad n^{n^2}, \quad 3^{n^3+n}, \quad 2^n, \quad n^{lg(n)}$$

Отговор: $f_4(n) \succ f_3(n) \succ f_1(n) \succ f_2(n) \asymp f_5(n) \succ f_6(n)$.

Решение:

Номерираме функциите $f_1(n) = \sum_{i=1}^{lg(n!)} 2^{n^2}$, $f_2(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$, $f_3(n) = n^{n^2}$, $f_4(n) = 3^{n^3+n}$, $f_5(n) = 2^n$, $f_6(n) = n^{lg(n)}$.

- (1 точки за пресмятане на сумата и 1 точка правилното използване на апроксимация на Стирлинг)

$f_1(n) = \sum_{i=1}^{lg(n!)} 2^{n^2} \asymp lg(n!)2^{n^2} \asymp nlg(n)2^{n^2}$, използвайки 16 задача от сборника с задачи на Минко Марков, която се решава чрез апроксимация на Стирлинг.

- (1 точки за пресмятане на сумата и 1 за сравнението на двете функции)

$f_2(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$, просто разписвайки $(1+1)^n$, тогава $f_2(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n = f_5(n)$. Съответно и $f_2(n) \asymp f_5(n)$.

- (3 точки за използването на това твърдение)

Използваме 1.41 от сборника, което е изпълнено ако дясната е растяща и неограничена функция, за да подредим функциите по асимптотично нарастване.

- (1 точка за обясненията и 1 за сравнението на двете функции)

Сравняваме $f_6(n) = n^{lg(n)}$ и $f_5(n) = 2^n$, като логаритмуваме и получаваме $lg^2(n)$ и $nlg(2)$ съответно, но $lg^2(n) \prec nlg(2)$, тогава от 1.41 $f_5(n) \succ f_6(n)$. Дотук имаме $f_2(n) \asymp f_5(n) \succ f_6(n)$.

- (1 точка за обясненията и 1 за сравнението на двете функции)

Сравняваме $f_1(n) = \sum_{i=1}^{lg(n!)} 2^{n^2} \asymp nlg(n)2^{n^2}$ и $f_5(n) = 2^n$, като логаритмуваме и получаваме

$lg(n) + lglg(n) + n^2lg(2) \asymp n^2lg(2)$ и $nlg(2)$ съответно, но $n^2lg(2) \succ nlg(2)$, тогава от 1.41 $f_1(n) \succ f_5(n)$. Дотук имаме $f_1(n) \succ f_2(n) \asymp f_5(n) \succ f_6(n)$.

- (1 точка за обясненията и 1 за сравнението на двете функции)

Сравняваме $f_1(n) = \sum_{i=1}^{lg(n!)} 2^{n^2} \asymp nlg(n)2^{n^2}$ и $f_3(n) = n^{n^2}$, като логаритмуваме и получаваме

$lg(n) + lglg(n) + n^2lg2 \asymp n^2lg(2)$ и $n^2lg(n)$ съответно, но $n^2lg(n) \succ n^2lg(2)$, тогава от 1.41 $f_3(n) \succ f_1(n)$. Дотук имаме $f_3(n) \succ f_1(n) \succ f_2(n) \asymp f_5(n) \succ f_6(n)$.

- (1 точка за обясненията и 1 за сравнението на двете функции)

Сравняваме $f_4(n) = 3^{n^3+n}$ и $f_3(n) = n^{n^2}$, като логаритмуваме и получаваме $(n^3+n)lg(3)$ и $n^2lg(n)$ съответно, но $(n^3+n)lg(3) \succ n^2lg(2)$, тогава от 1.41 $f_4(n) \succ f_3(n)$. Вече имаме всичките подредени $f_4(n) \succ f_3(n) \succ f_1(n) \succ f_2(n) \asymp f_5(n) \succ f_6(n)$.

(13 точки) 2 Задача. Намерете асимптотичната сложност на следният фрагмент и изведете точен израз за a:

```
int i, j, a = 0;
for(i = 7 * n; i >= 0; i -= 7)
   for(j = 0; j <= i/7; j++)
      a += j;
return a;
```

Отговор: $a = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ и асимптотичната сложност е $\Theta(n^2)$.

Решение:

Търсенето на асимптотичната сложност на фрагмента е от какъв порядък ще се изпълни тялото на най вътрешния цикъл. Тогава тази сложност ще е сумата

$$\sum_{i=7*n,7*(n-1),...,7,0} \sum_{j=0}^{i/7} 1$$

- (3 точки за полагането)

Забелязваме, че първият цикъл се изпълнява за $i = 7*n,\ 7*(n-1),\ 7*(n-2),\ ...,\ 7,\ 0$, а втория цикъл се изпълнява за $j = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ i/7$ тогава можем да положим първата сума да е за $i = n,\ (n-1),\ (n-2),\ ...,\ 1,\ 0$, а втората сума да е за $j = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ i$ и получаваме, че трябва да сметнем тази сума.

- (4 точки за смятането на първата сума)

$$\sum_{i=n}^{0} \sum_{j=0}^{i} 1 = \sum_{i=n}^{0} i + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \Theta(n^2)$$

- (6 точки за смятането на втората сума)

За точния израз на a пак получаваме сума. Аналогично за втората сума променяме от колко до колко се менят i и j

$$\sum_{i=7*n,7*(n-1),...,7,0} \sum_{j=0}^{i/7} j = \sum_{i=n}^{0} \sum_{j=0}^{i} j = \sum_{i=n}^{0} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{0} i^2 + i = \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{0} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{0} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} == \frac{2n^3+3n^2+n+3n^2+3n}{12} = \frac{2n^3+6n^2+4n}{12} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(10 точки) 3 Задача. Намерете инвариантата на цикъла:

```
ALG1(A[1, 2, ..., n] : floating point numbers)
1  int i
2  double avr ← A[1]
3  for (i ← 2 to n; i++)
4     avr ← (avr * (i − 1) + A[i])/i
```

- (0-10 точки за формулирането на инварианта)

Отговор: Инвариантата е “При всяко влизане на ред 3 в avr се пази средното аритметично на първите i-1 числа от масива A[1,2,...,n]”

Забележка: Ако някой е доказвал инварианта ще го прегледам и ще може да получи до 10 бонус точки, с които да не се надхвърля максимума от 50.

(12 точки) 4 Задача. Решете чрез развиване (итерация):

$T(n) \; = \; 2 * T(\sqrt{n}) + lg(n)$

Отговор: $T(n) \; = \; \Theta(lg(lg(n)) * lg(n))$

Решение:

- (3 точки за полагането)

За да минем към връзка от n към n-1 можем да положим $n = 2^{2^m}$, $m = lg(lg(n))$, $2^m = lg(n)$ по този начин рекурентното ни отношение се получава

$T(2^{2^m}) \; = \; 2 * T(\sqrt{2^{2^m}}) + lg(2^{2^m})$,

което е еквивалентно на

$T(2^{2^m}) \; = \; 2 * T(2^{2^{m-1}}) + 2^m$,

- (2 точки за преминаването от T към S)

сменяме новото рекурентно отношение да зависи от m и получаваме

$S(m) \; = \; 2 * S(m-1) + 2^m$,

- (5 точки за развиването)

което се развива лесно

$$S(m) \; = \; 2 * S(m-1) + 2^m \; = \; 2 * (2 * S(m-2) + 2^{m-1}) + 2^m \; = \; 2 * (2 * (2 * S(m-3) + 2^{m-2}) + 2^{m-1}) + 2^m \; = \; ... \; = \; 2^{m-1} * S(1) + \underbrace{2^m + ... + 2^m}_{m-1} \; = \; \Theta(2^m) + (m-1) * 2^m \; = \; \Theta(m * 2^m),$$

- (2 точки за отговора)

тогава $T(n) = S(m) = \Theta(m * 2^m) = \Theta(lg(lg(n)) * lg(n))$.