Контролна работа (упражнения, вариант 1) по ДАА, 4.06.2013г.

Име: __________________________________, ФН:______, Спец./курс:________

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	16	16	18	0	50

Задача 1 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n$ б) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n^2$

в) $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + n2^n$ г) $T(n) = T(n-1) + 3n$

Задача 2 Ориентиран граф $G(V, E)$ има n върха и не съдържа цикли. Най-дългият път в G (при единични тегла на ребрата) минава през $n-1$ ребра.

(a) Докажете, че в G може да се добави едно ново ребро, така че да се образува хамилтонов цикъл.

(b) Предложете бърз алгоритъм за намиране на върховете, които са краища на новото ребро.

Задача 3 Нарисувайте графа на Петерсен. Обозначете върховете му и добавете едно ново ребро така, че в новополучения граф да има хамилтонов цикъл. Напишете поредницата върхове в цикъла.

Решения:

Задача 1 (а) Прилагаме Мастър теорема. $k = \log_4 3, k < 1$, следователно $\exists\varepsilon > 0, n^{k+\varepsilon} = O(n)$, намираме се в трети случай, търсим константа $0 < c < 1$, за която да е изпълнено $3n/4 \leq cn$. $c = 4/5$ изпълнява неравенството. Следователно решението на рекурентното отношение е $T(n) = \Theta(n)$.

(б) Прилагаме Мастър теорема. $k = \log_{\sqrt{2}} 2, k = 2$, следователно $n^k = \Theta(n^2)$, намираме се във втори случай, решението на рекурентното отношение е $T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$.

(в) Решаваме чрез характеристично уравнение. Хомогенната част поражда уравнението $x^2 = x + 2$, с множество от корени $\{-1, 2\}$. Нехомогенната част поражда множеството корени $\{2, 2\}$. Като слеем двете мултимножества, получаваме пълния списък от корени $\{-1, 2, 2, 2\}$. Базисните решения са $1^n, 2^n, n2^n, n^2 2^n$. Последното расте най-бързо, следователно $T(n) = \Theta(n^2 2^n)$.

(г) Решаваме чрез характеристично уравнение. Хомогенната част поражда уравнението $x = 1$, с множество от корени $\{1\}$. Нехомогенната част поражда множеството корени $\{1, 1\}$. Като слеем двете мултимножества, получаваме пълния списък от корени $\{1, 1, 1\}$. Базисните решения са $1^n, n1^n, n^2 1^n$. Последното расте най-бързо, следователно $T(n) = \Theta(n^2 1^n) = \Theta(n^2)$.

Задача 2 (а) Нека най-дългият път в графа започва от връх v_1 и завършва във връх v_n. Тъй като минава през $n - 1$ ребра, пътят ще мине през всички вътхове на графа. Като добавим към него реброто v_n, v_1, ще получим хамилтонов цикъл.

(b) Да сортираме топологично графа G. Първият връх в топологичната наредба задължително е v_1, защото във всички останали върхове влиза поне едно ребро. По същите причини v_n ще е последен.

Задача 3 Графът на Петерсен е толкова симетричен, че новото ребро можем да добавим произволно, стига да не свързва съседни върхове. След това намираме Хамилтонов цикъл с проби и грешки.