Задачи за екстра кредит по ЕАИ на **8гр**, 1к, сп. Компютърни Науки.

28 април 2013 г.

Задача 1 Нека L е езикът от всички думи над азбука $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, които разглеждани като числа в десетична бройна система са кратни на 9.

1. Да се докаже, че L е регулярен, но не съществува детерминиран автомат A, който разпознава L, такъв че A може да бъде изобразен в равнината без самопресичания, тоест графът индуциран от A е планарен.

2. Да се докажа, че за всеки регулярен език L съществува планарен, краен автомат, който разпознава L.

Задача 2 Нека $\Sigma = \{\sigma\}$ е еднобуквена азбука. За език $L \subseteq \Sigma^*$ с $\mathcal{N}(L)$ означаваме следното множество от естествени числа:

$$\mathcal{N}(L) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \sigma^n \in L\}.$$

1. Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато $\mathcal{N}(L)$ е крайно обединение от аритметични прогресии.

2. Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато за L е изпълнена лемата за разрастване за регулярни езици(Pumping Lemma).

3. Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато L е контекстносвободен.

Задача 3 Нека A_1 и A_2 са тотални крайни детерминирани автомати с n_1 и n_2 състояния, съответно. Да се докаже, че $\mathcal{L}(A_1) \neq \mathcal{L}(A_2)$ тогава и само тогава, когато съществува дума $|\alpha| \leq n_1 + n_2$, за която $\alpha \in \mathcal{L}(A_1) \triangle \mathcal{L}(A_2)$. Може ли да се замени оценката $n_1 + n_2$ с $\max\{n_1, n_2\}$?

Задача 4 Нека A е произволен краен автомат. Нека с $D(A)$ означим автомата, който се получава при детерминизация на автомата A, използвайки множествената конструкция, разгледена на упражнения, а с $R(A)$ – автомата, получен при обръщането на автомата A. Да се докаже, че за всеки краен автомат A, минималният краен детерминиран автомат A_m с език $\mathcal{L}(A_m) = \mathcal{L}(A)$ е изоморфен на автомата:

$$D(R(D(R(A)))).$$

Задача 5 Нека L_1 и L_2 са регулярни езици над азбука Σ. Да се докаже, че езиците:

$$L_1 L_2^{-1} = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L_2 [uv \in L_1]\}$$
$$L_1^{-1} L_2 = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in L_1 [uv \in L_2]\}$$

са регулярни. Ако индексите на L_1 и L_2 са съответно $ind(L_1) = n$ и $ind(L_2) = m$, какви оценки отгоре може да се направят за индексите на езиците $L_1 L_2^{-1}$ и $L_1^{-1} L_2$.

Задача 6 Нека L_1 и L_2 са регулярни езици над азбука Σ. Да се докаже, че езикът:

$$L = \{a_1 a_2 \ldots a_{2n} \mid a_1 a_3 \ldots a_{2n-1} \in L_1 \text{ и } a_2 a_4 \ldots a_{2n} \in L_2\}$$

е регулярен. Как може да се оцени отгоре $ind(L)$ чрез индексите на езиците L_1 и L_2. (a_i са букви от азбуката Σ).

Задача 7 Нека Σ е азбука и L е езикът:

$$L = \{uvvvw \mid u, v, w \in \Sigma^* \text{ и } v \neq \varepsilon\}.$$

Да се докаже, че L е регулярен тогава и само тогава, когато $|\Sigma| \leq 2$.