1.3 Контекстно свободни езици

Пример

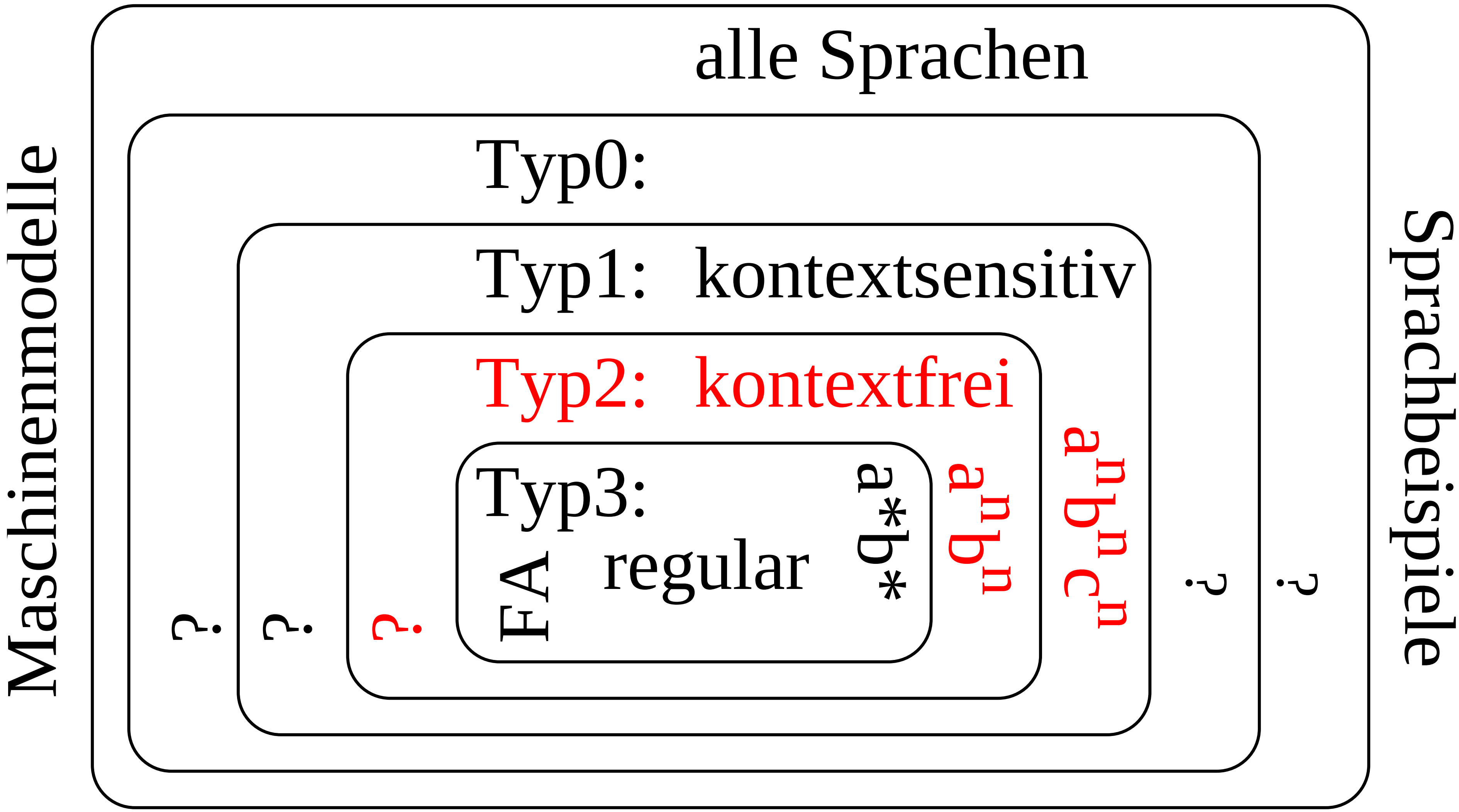
Аритметични изрази: $G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E)$ с

$$P = \{E \to T, E \to E + T, T \to F, T \to T * F, F \to a, F \to (E)\}$$

$\{a^n b^n : n \geq 1\}$: $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to ab, S \to aSb\}, S)$

Синтаксис на програмните езици: Pascal, C, ...

Йерархия на Чомски



План

1. Нормална форма
2. Негативни резултати с помощта на Pumping-лемата
3. Свойства на затвореност
4. Проблемът за принадлежност на дума
5. Стекови автомати

1.3.1 Нормална форма на Чомски

Една граматика $G' = (V, \Sigma, P, S)$ е в нормална форма на Чомски, ако
$P \subseteq V \times \Sigma \cup V \times VV$.

- ε-елиминиране
- елиминиране на (единичните) правила от вида $A \longrightarrow B$
- елиминиране на правилата с дълга дясна част

ε-елиминация

$\forall G = (V, \Sigma, P, S)$ с $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^* :$

$\exists G' : L(G) = L(G'), G'$ е от тип 2

ε елиминация за $G = (V, \Sigma, P, S)$

$V_\varepsilon := \{\}$

while $\exists X \to \alpha \in P : X \notin V_\varepsilon \wedge \alpha \in V_\varepsilon^*$ do $V_\varepsilon := V_\varepsilon \cup \{X\}$

assert $V_\varepsilon = \left\{X \in V : X \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon\right\}$

while $\exists X \to \alpha Y \beta \in P : Y \in V_\varepsilon \wedge X \to \alpha\beta \notin P$ do

$\quad P := P \cup X \to \alpha\beta$ // invariant : $L(G)$

$P := P \setminus (V \times \{\varepsilon\})$ // invariant : $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$

if $S \in V_\varepsilon$ then return $(V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to \varepsilon, S' \to S\}, S')$

else return (V, Σ, P, S)

Упражнение: Линейно време за откриване на V_ε.

$(\mathcal{O}(|V| + \sum_{X \to r \in P} |r|))$

Упражнение a^*b^*

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S),$$
$$P = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aA, A \longrightarrow \varepsilon, B \longrightarrow bB, B \longrightarrow \varepsilon\}$$

$$\text{while } \exists X \longrightarrow \alpha \in P : X \notin V_\varepsilon \wedge \alpha \in V_\varepsilon^* \text{ do } V_\varepsilon := V_\varepsilon \cup \{X\}$$

$$V_\varepsilon : \{\} \rightsquigarrow \{A\} \rightsquigarrow \{A, B\} \rightsquigarrow \{A, B, S\}$$

Упражнение a^*b^*

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S),$$
$$P = \{S \to AB, A \to aA, A \to \varepsilon, B \to bB, B \to \varepsilon\}$$
$$V_\varepsilon = \{A, B, S\}$$

while $\exists X \to \alpha Y \beta \in P : Y \in V_\varepsilon \wedge X \to \alpha\beta \notin P$ do $P := P \cup X \to \alpha\beta$

$$A \to aA, A \in V_\varepsilon \rightsquigarrow A \to a$$
$$B \to bB, B \in V_\varepsilon \rightsquigarrow B \to b$$
$$S \to AB, A \in V_\varepsilon \rightsquigarrow S \to B$$
$$S \to AB, B \in V_\varepsilon \rightsquigarrow S \to A$$
$$S \to A, A \in V_\varepsilon \rightsquigarrow S \to \varepsilon$$
$S \to B, B \in V_\varepsilon$ but $S \to \varepsilon \in P$
$$P = \{S \to AB, A \to aA, A \to \varepsilon, B \to bB, B \to \varepsilon,$$
$$A \to a, B \to b, S \to B, S \to A, S \to \varepsilon\}$$

Упражнение a^*b^*

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S),$$

$$P = \{S \to AB, A \to aA, A \to \varepsilon, B \to bB, B \to \varepsilon\}$$

$$V_\varepsilon = \{A, B, S\}$$

$$P := \{S \to AB, A \to aA, A \to \varepsilon, B \to bB, B \to \varepsilon,$$

$$A \to a, B \to b, S \to B, S \to A, S \to \varepsilon\}$$

$$P := P \setminus (V \times \{\varepsilon\})$$

$$P := \{S \to AB, A \to aA, B \to bB,$$

$$A \to a, B \to b, S \to B, S \to A\}$$

Return $(\{S', S, A, B\}, \{a, b\}, P, S')$,

$$P := \{S' \to \varepsilon, S' \to S, S \to AB, A \to aA, B \to bB,$$

$$A \to a, B \to b, S \to B, S \to A\}$$

Доказателство за коректност

- $X \in V_\varepsilon \longrightarrow X \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon$: даден извод
- $X \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon \longrightarrow X \in V_\varepsilon$: индукция по дължината на извода
- Инварианта на цикъла
- Завършване !
- Елиминация на ε-правилата не променя $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$: Индукция по дължината на извода. Заменяме правилото
$\gamma X \delta \overset{X \to \alpha Y \beta}{\Rightarrow} \gamma \alpha Y \beta \delta \overset{Y \to \varepsilon}{\Rightarrow} \gamma \alpha \beta \delta$ с
$\gamma X \delta \overset{X \to \alpha \beta}{\Rightarrow} \gamma \alpha \beta \delta$.

Доказателство за коректност — завършване

assert $V_\varepsilon = \left\{X \in V : X \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon\right\}$

while $\exists X \to \alpha Y \beta \in P : Y \in V_\varepsilon \wedge X \to \alpha\beta \notin P$ do

$\quad P := P \cup \{X \to \alpha\beta\}$

Нека $k := \max\{|r| : X \to r \in P\}$.

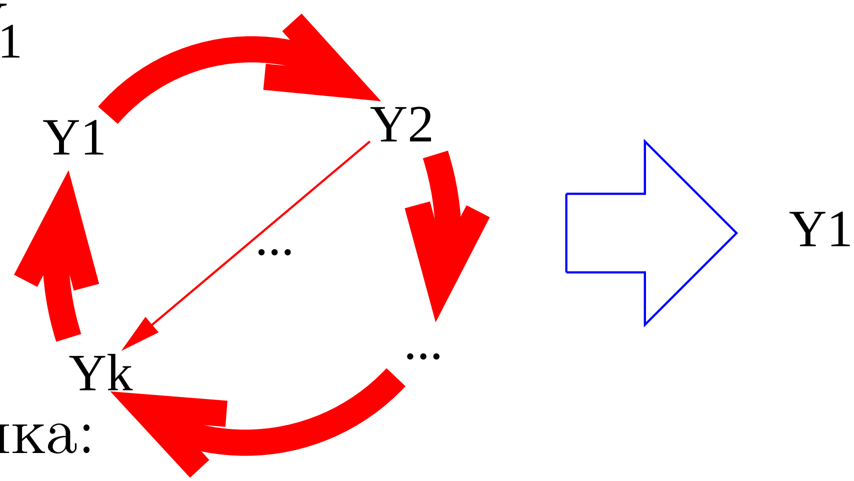
Наблюдение: Има нови правила $X \to w \in P$, $|w| < k$.

Но са само краен брой правила с ограничена дължина.

Елиминация на цикличните единични правила

$G = (V, \Sigma, P, S)$ контекстно-свободна без ε-правила
Да разгледаме графа $U = (V, P \cap V \times V)$ на единичните правила.

while $\exists$cycle $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ in U, $k \geq 1$ do
    invariant : $L(G)$
    replace $Y_2, \ldots, Y_k$ in G с Y_1
    $P := P \setminus \{Y_1 \to Y_1\}$
assert U is cycle-free



Граф-теоретична гледна точка:
контракция(редуциране) на силно свързаните компоненти

Елиминация на нецикличните единични правила

invariant : Графът на единичните правила U няма цикли

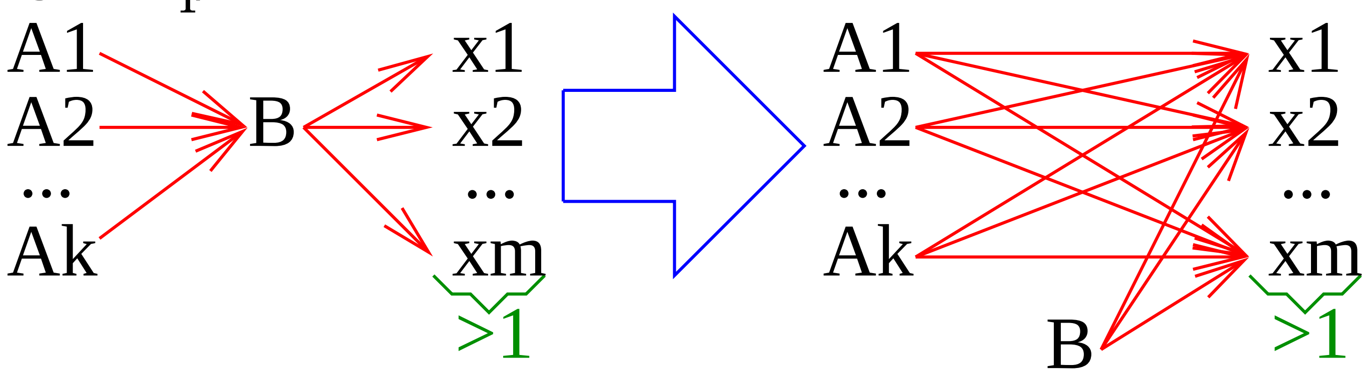
while $\exists X \to Y \in P \cap V \times V : P \cap \{Y\} \times V = \emptyset$ do

  invariant : $L(G)$

  $P := P \cup \{X \to x : X \to Y \in P \land Y \to x \in P\}$

  $P := P \setminus V \times \{Y\}$

assert U е празен



Граф-теоретична гледна точка: Нареждаме ги в обратна на топологична сортировка ред.

Нормална форма на Чомски

Една граматика $G' = (V, \Sigma, P, S)$ е в нормална форма на Чомски, ако $P \subseteq V \times \Sigma \cup V \times VV$.

Твърдение: За всяка контекстно-свободна гарматика G с $\varepsilon \notin L(G)$, $\exists G'$ в нормална форма на Чомски, такава че $L(G) = L(G')$.

Д-во на твърдението: Стъпка по стъпка променяме граматиката G.

Инвариант: $L(G)$ остава непроменен.

1. ε елиминиране
2. елиминиране на единичните правила.

Елиминация на смесените десни страни

foreach $a \in \Sigma$ do

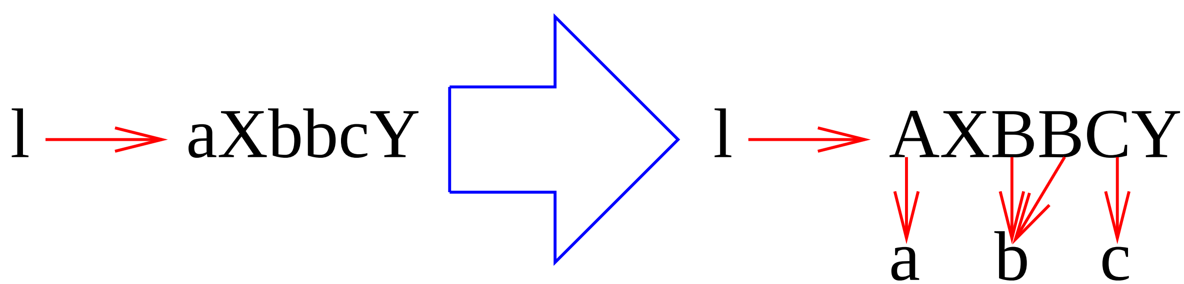
  $V_a :=$ new variable

  $P := P \cup \{V_a \to a\}$

  foreach $\ell \to r \in P$ do

    if $a \in r \wedge |r| \geq 2$ then replace a с V_a in $V \to r$

assert $P \subseteq V \times \Sigma \cup V \times V^*$



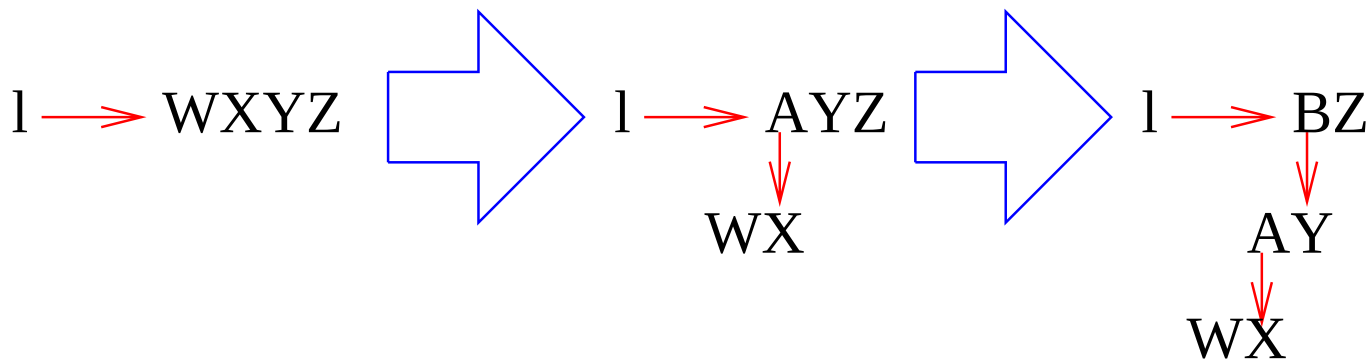
Елиминация на дългите десни страни

while $\exists X \longrightarrow Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_k \in P$ с $k \geq 3$ do

$C :=$ new variable

$P := P \cup \{C \longrightarrow Y_1 Y_2, X \longrightarrow C Y_3 \cdots Y_k\} \setminus \{X \longrightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k\}$

Цикълът завършва, тъй като $\sum_{\ell \to r \in P} \max(0, |r| - 2)$ намалява.



Упражнение

$$\{E \longrightarrow E+E, E \longrightarrow E*E, E \longrightarrow (E), E \longrightarrow a\}$$

$\rightsquigarrow$

$$\{E \longrightarrow EV_+E, E \longrightarrow EV_*E, E \longrightarrow V_(EV_), E \longrightarrow a,$$
$$V_+ \longrightarrow +, V_* \longrightarrow *, V_(\longrightarrow (, V_) \longrightarrow)\}$$

$\rightsquigarrow$

$$\{C \longrightarrow EV_+, E \longrightarrow CE,$$
$$D \longrightarrow EV_*, E \longrightarrow DE,$$
$$F \longrightarrow V_(E, E \longrightarrow FV_),$$
$$E \longrightarrow a,$$
$$V_+ \longrightarrow +, V_* \longrightarrow *, V_(\longrightarrow (, V_) \longrightarrow)\}$$

1.3.2 Pumping Лема

L е контекстно-свободен

$$\rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L : |z| > n$$

$$\rightarrow \exists u, v, w, x, y : z = uvwxy \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n \wedge$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i wx^i y \in L$$

С думи:

Достатъчно дългите думи в един контекстно-свободен език остават в него с итериране на една или две нетривиални поддуми "‘pumping"’.

Доказателство на Pumping лемата

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е граматика в нормална форма на Чомски за $L - \{\varepsilon\}$.

Нека $k = |V|$, $n = 2^k$,

$z \in L$ с $|z| = m \geq n$ произволна.

Да разгледаме синтактично дърво за z.

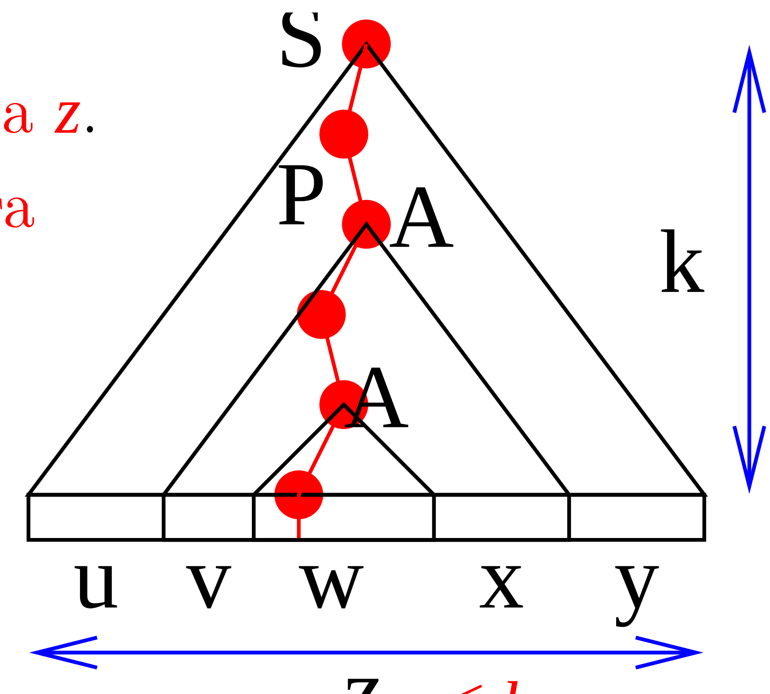
Макс. степен ≤ 2, има $\geq n = 2^k$ листа

$\longrightarrow \exists$ път P с дължина $|P| > k$.

$\longrightarrow \geq k+1$ променливи в P.

$\longrightarrow \exists$ променлива $A \in P$:

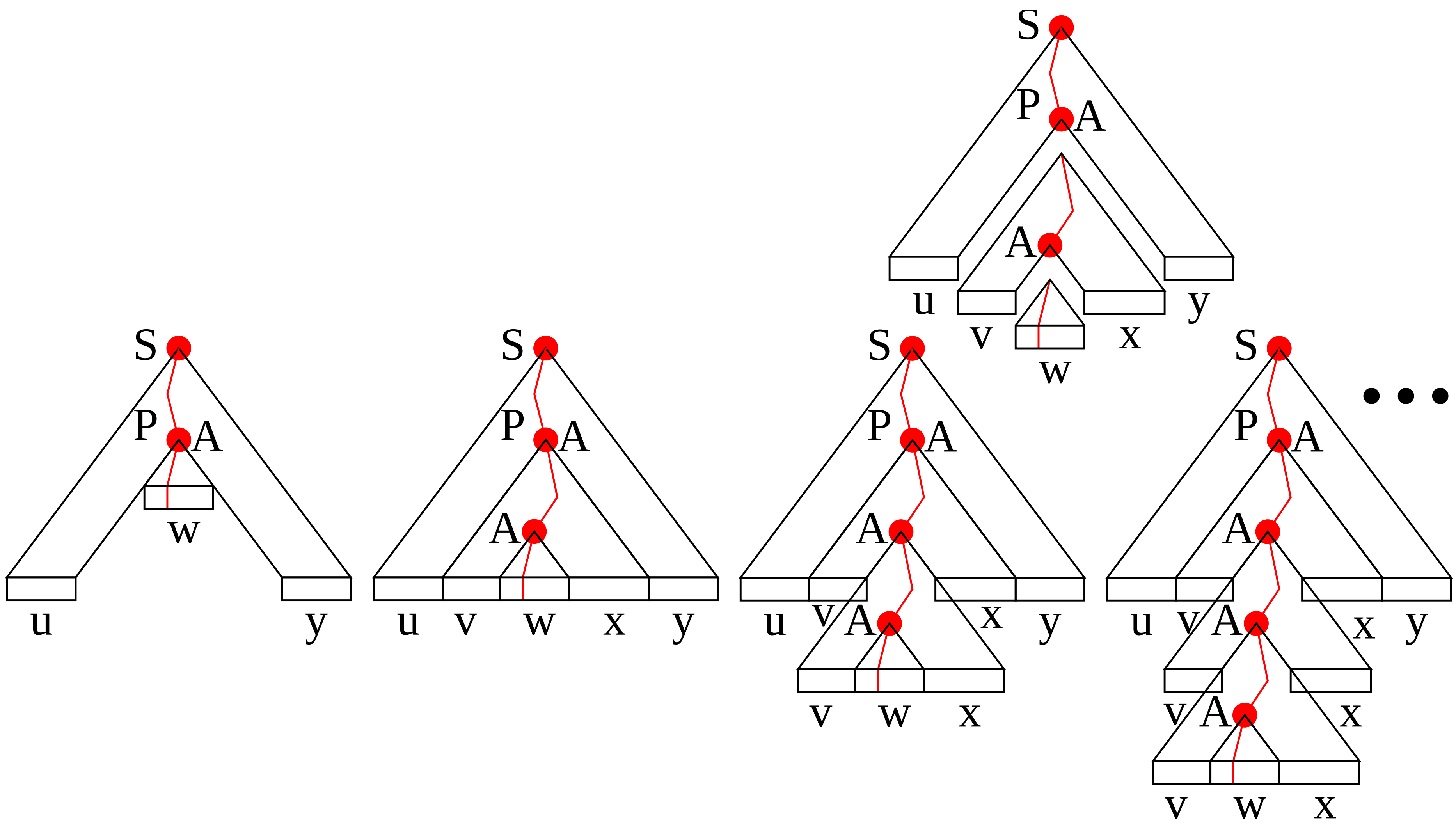
A се появява ≥ 2 пъти ($|vx| \geq 1$).



Второто появяване отдолу нагоре е на разстояние $\leq k$.

$\longrightarrow$ корен на поддърво за поддумата vwx с дължина $\leq n$

Конструкция на итерациите:



Лема: Едно двоично дърво (възлите със степен 0 или 2) с $\geq 2^k$ листа съдържа път P с дължина $\geq k$.

Д-во: Индукция по k.

Случай $k = 0$: 1 листо, дължина на път 0.

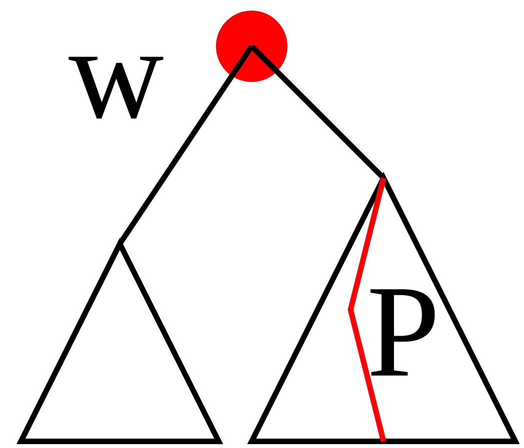
Случай $k \rightsquigarrow k+1$:

$\geq 2^{k+1}$ листа. Коренът w има степен 2.

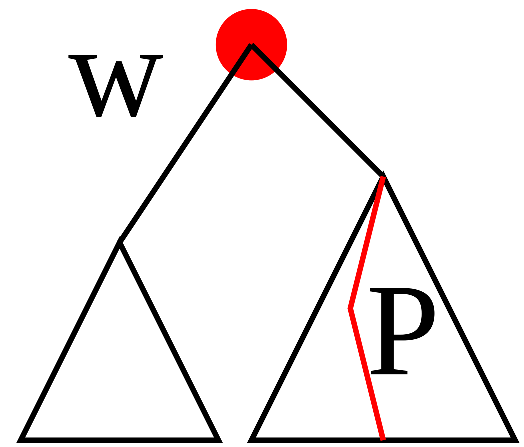
Поне едно поддърво има $\geq 2^k$ листа

и съдържа път P с дължина $\geq k$.

Така wP има дължина $\geq k+1$.



Следствие: Ако в едно двоично дърво (възлите със степен 0 или 2) всеки път е с дължина $\leq k$, то има $\leq 2^k$ листа.



$L = \{a^m b^m c^m : m \geq 1\}$ не е контекстно-свободен

Допускаме, че L е контекстно-свободен.

Нека n е числото от Pumping лемата.

Да разгледаме $z = a^n b^n c^n$ и представянето

$z = uvwxy$ от Pumping лемата като

$|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$, $uv^0wx^0y = uwy \in L$.

vx не може да съдържа a-тата, b-тата и c-тата.

$\longrightarrow$ балансът на a-тата, b-тата и c-тата в uwy е нарушен.

$\longrightarrow$ $uwy \notin L$

Противоречие.

Следствие: тип 2$\neq$тип 1

$L = \{ww : w \in \{a,b\}^*\}$ не е контекстно-свободен

Допускаме, че L е контекстно-свободен.

Нека n е числото от Pumping лемата.

Да разгледаме $z = a^n b^n a^n b^n$ и декомпозицията

$z = uvwxy$ от Pumping лемата с $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$,

$z' := uwy \in L$.

Случай $vx = a^k b^j$ е в лявата половина:

$\longrightarrow z' = a^{n-k} b^{n-j} a^n b^n$. Противоречие.

Случай vx лежи в дясната половина: (аналогично)

Случай vx лежи в средата: $vx = b^k a^j$

$\longrightarrow z' = a^n b^{n-k} a^{n-j} b^n$. Противоречие.

Правила за д-во с Pumping Лемата

1. Нека n е числото от Pumping лемата.
2. Да разгледаме $z =???$ $(|z| \geq n)$ и представянето $z = uvwxy$ от Pumping лемата с $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$
   - Всяка дума z с $|z| \geq n$. “Изобретателната” част !
   - Изборът на думата — д-вото да е просто
   - Тъй като $|vwx| \leq n$ съдържа блокове с дължина n имаме следните случаи
3. Случаи за всички възможни декомпозиции $z = uvwxy$. За всеки случай: Намираме $i \geq 0$, такова че $uv^iwx^iy \notin L(G)$.

   Типични стойности: $i = 0$, $i = 2$.

   Предизвикателство: Броят на случаите по-малък.

1.3.3 Свойства на затвореност

Контекстно свободните езици са затворени относно

- обединение $\cup$
- конкатенация $\cdot$
- операцията звезда $*$

не са затворени относно

- сечение $\cap$
- допълнение $\overline{\cdot}$

Затвореност на CFG относно $\cup$

Да разгледаме

$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$,

$G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$,

Нека $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и

$G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2, \Sigma, \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\} \cup P_1 \cup P_2)$.

Очевидно имаме

$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Затвореност на CFG относно $\cdot$

Да разгледаме

$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$,

$G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$,

Нека $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и

$G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2, \Sigma, \{S \rightarrow S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2)$.

Ясно е, че

$L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$.

Затвореност на CFG относно $*$

Да разгледаме

$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$

и нека S_1 не участва в десните страни на P. И

$G = (\{S\} \cup V_1, \Sigma, \{S \to \varepsilon, S \to S_1, S_1 \to S_1 S_1\} \cup P_1 \setminus \{S_1 \to \varepsilon\})$.

Тогава

$L(G) = L(G_1)^*$.

НЕзатвореност на CFG относно $\cap$

Да разгледаме контекстно свободните езици

$L_1 = \{a^i b^j c^j : i, j > 0\}$

$L_2 = \{a^i b^i c^j : i, j > 0\}$.

$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i : i > 0\}$ не е контекстно-свободен!

НЕзатвореност на CFG относно $\overline{\cdot}$

Да допуснем:

затвореност относно $\cup$ и $\overline{\cdot}$.

$\longrightarrow$

затвореност относно $\cap$.

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

Противоречие

1.3.4 CYK-алгоритъм — Проблемът за принадлежност на дума за контекстно-свободни гарматики

Дадено: Една гарматика $G = (V, \Sigma, P, S)$,
и дума $x = x_1 \cdots x_n \in \Sigma^*$.

Въпрос: $x \in L(G)$?

Алгоритъм на Cocke, Younger и Kasami

Нека G е в нормална форма на Чомски:
Специалният случай $x = \varepsilon$ е лесен,
тъй като предварително е превирната в нормална форма на Чомски.

CYK алгоритъм

Ние решаваме по-общ проблем:

За всяка поддума $x_i \cdots x_{i+j-1}$ на x с дължина j,

от кои променливи е изводима $x_i \cdots x_{i+j-1}$?

$$T[i,j] := \left\{ A \in V : A \overset{*}{\Rightarrow} x_i \cdots x_{i+j-1} \right\}$$

Случай $j = 1$: $T[i,1] = \{A \in V : A \to x_i \in P\}$

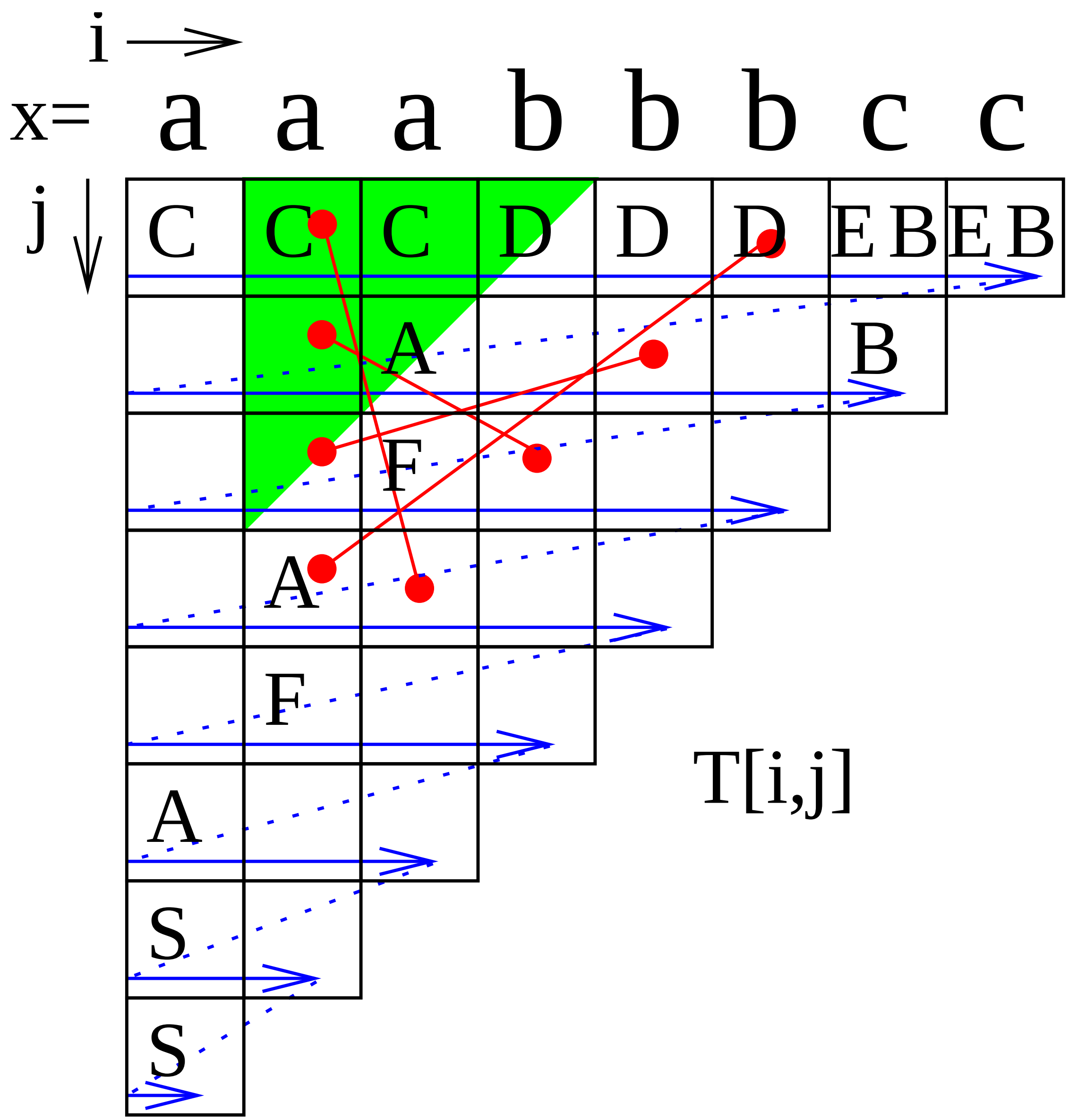
В противен случай:

$$T[i,j] := \{A \in V : \exists A \to BC \in P : \exists k \in \{1,\ldots,j-1\} : \\ B \in T[i,k] \wedge C \in T[i+k, j-k]\}$$

Накрая: $S \in T[1,n]$?

Упражнение

$G = (\{S, A, B, C, D, E, F\},$
$\{a, b, c\}, P, S),$
$P = \{$
$S \to AB,$
$A \to CD,$
$A \to CF,$
$B \to c,$
$B \to EB,$
$C \to a,$
$D \to b,$
$E \to c,$
$F \to AD\}$



Приложение на динамичното програмиране

for $i := 1$ to n do $T[i,1] := \{A \in V : A \to x_i \in P\}$

for $j := 2$ to n do

for $i := 1$ to $n - j + 1$ do

$T[i,j] := \emptyset$

for $k := 1$ to $j - 1$ do

$T[i,j] \hookleftarrow \{A : \exists A \to BC \in P : B \in T[i,k] \wedge C \in T[i+k, j-$

return $S \in T[1,n]$

Лема След $j-1$ изпълнения на цикъла по j, $j \geq 1$, за всяко $i = 1, \ldots, n-j+1$:

$$T[i,j] := \left\{A \in V : A \overset{*}{\Rightarrow} x_i \cdots x_{i+j-1}\right\}.$$

Анализ

Нека $V = 1..|V|$

for $i := 1$ to n do $T[i,1] := \{A \in V : A \to x_i \in P\}$ // "евтино"

for $j := 2$ to n do // $\leq n$ пъти

for $i := 1$ to $n - j + 1$ do // $\leq n$ пъти

$T[i,j] := \emptyset$ // Двоичен вектор с големина $|V| \leq |P|$

for $k := 1$ to $j - 1$ do // $\leq n$ пъти

foreach $A \to BC \in P$ do // $\leq |P|$ пъти

if $B \in T[i,k] \wedge C \in T[i+k, j-k]$ then // $\mathcal{O}(1)$

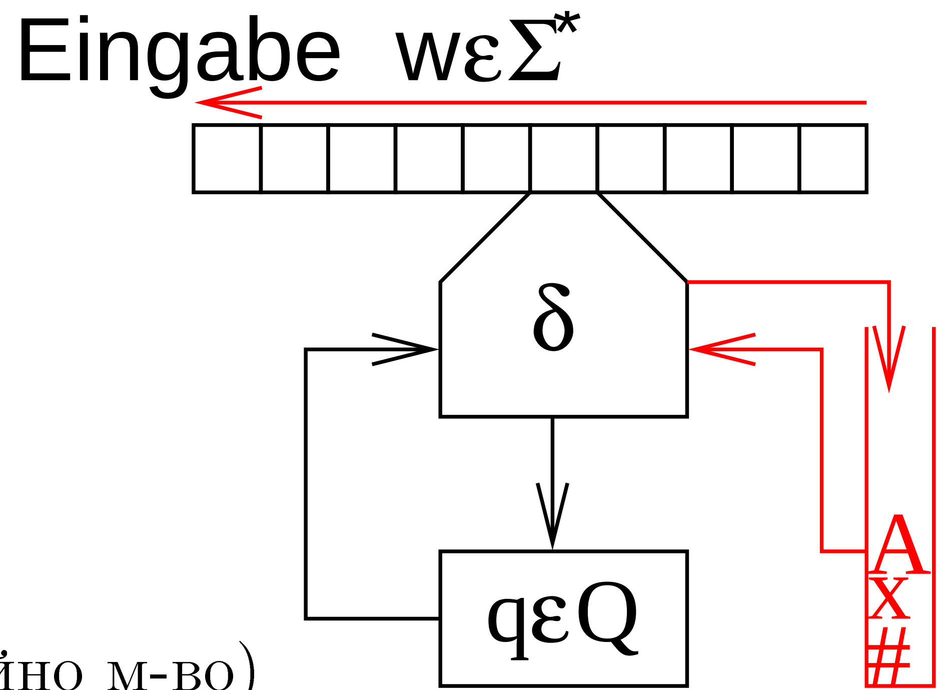
добавяме A към $T[i,j]$ // $\mathcal{O}(1)$

return $S \in T[1,n]$

Време: $\mathcal{O}(n \times n \times (|V| + n \times |P|)) = \mathcal{O}\left(n^3|P|\right)$

1.3.5 Стекови автомати

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$:



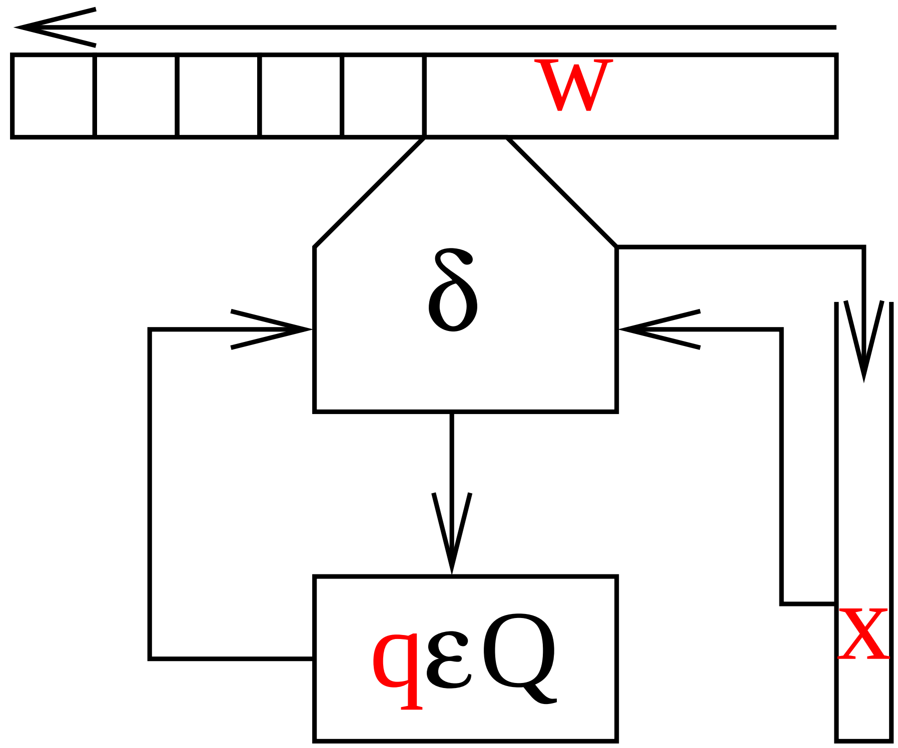
- Q, състояния
- Σ, азбука
- Γ азбука за стека, $\Sigma \cup \{\#\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, функция на прехода; (крайно м-во)
- $s \in Q$, начално състояние
- $\# \notin \Sigma$: край на стека,

$\approx \varepsilon$NFA + стекова памет − крайните състояния

$\approx$ специална 2-лентова-машина на Тюринг

Конфигурация на стеков автомат

$(q, w, x) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$



Как работи един стеков автомат

Възможни преходи между конфигурации.

Четене на един входен символ a:

$$(q, aw, bx) \overset{(q',x')\in\delta(q,a,b)}{\vdash} (q', w, x'x)$$

ε-преход:

$$(q, w, bx) \overset{(q',x')\in\delta(q,\varepsilon,b)}{\vdash} (q', w, x'x)$$

$$(q, w, \alpha) \vdash^* (q', w, \beta) \iff$$

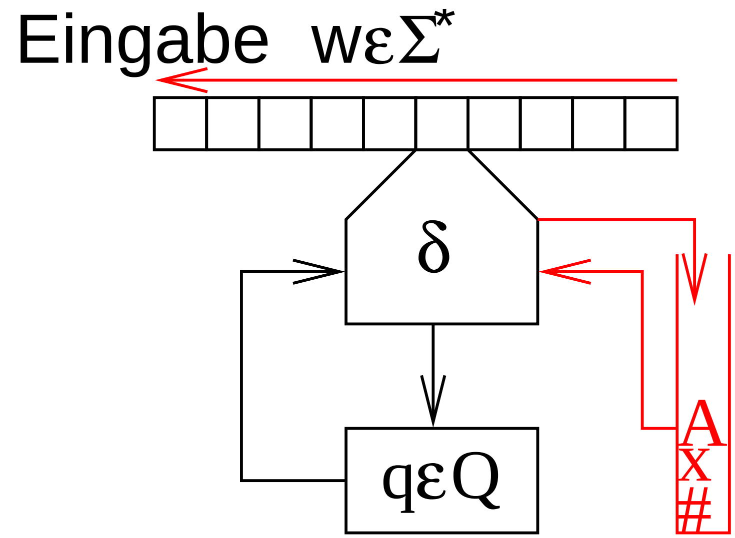
$$\exists C_1 \ldots C_n (C_1 = (q, w, \alpha) \,\&\, C_n = (q', w, \beta) \,\&\, C_1 \vdash C_2 \ldots C_{n-1} \vdash C_n)$$

$$(q, w, \alpha) \vdash^* (q, w, \alpha)$$

Стековите автомати като разпознаватели

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$.

$L(K)$?



Дефиниция:

K приема $w \in \Sigma^*$ т.т.к.

$\exists$ редица от (разрешени от δ) конфигурации

$(s, w, \#) \vdash \cdots \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ с $q \in Q$ произволно.

"Приемане с празен стек"

$L(K) := \{w \in \Sigma^* : K \text{ приема } w\}$.

Упражнение: $\left\{w\$w^R : w \in \{a,b\}^*\right\}$

$K = (\{0,1\},\{a,b,\$\},\{a,b,\#\},\delta,0,\#)$

$\delta(0,\$,k) = \{(1,k)\}$

$\delta(0,i,k) = \{(0,ik)\}$ за $i \in \{a,b\}$

$\delta(1,i,i) = \{(1,\varepsilon)\}$

$\delta(1,\varepsilon,\#) = \{(1,\varepsilon)\}$

$(0,ba\$ab,\#)\vdash$

$(0,a\$ab,b\#)\vdash$

$(0,\$ab,ab\#)\vdash$

$(1,ab,ab\#)\vdash$

$(1,b,b\#)\vdash$

$(1,\varepsilon,\#)\vdash$

$(1,\varepsilon,\varepsilon)$

Упражнение: $\left\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\right\}$

$K = (\{0,1\},\{a,b\},\{a,b,\#\},\delta,0,\#)$

$\delta(0,\varepsilon,k) = \{(1,k)\}$

$\delta(0,i,k) = \{(0,ik)\}$

$\delta(1,i,i) = \{(1,\varepsilon)\}$

$\delta(1,\varepsilon,\#) = \{(1,\varepsilon)\}$

$$
\begin{tikzcd}
\text{0,baab,\#} \arrow[r] \arrow[d] & \text{1,baab,\#} \arrow[d] \\
\text{0,aab,b\#} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{1,baab,} \\
\text{0,ab,ab\#} \arrow[d] & \text{1,aab,b\#} \\
\text{1,ab,ab\#} \arrow[d] & \\
\text{1,b,b\#} \arrow[d] & \\
\text{1,,\#} \arrow[d] & \\
\text{1,,} &
\end{tikzcd}
$$

Твърдение: L е контекстно-свободен т.т.к. $\exists$ недетерминистичен стеков автомат (NstackA) $M : L(M) = L$

Д-во: L е контекстно-свободен $\longrightarrow \exists$ NstackA $M : L(M) = L$

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е грамматика с $L(G) = L$.

Да разгледаме NstackA $M = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S)$ с

$$(1) \forall A \to \alpha \in P : (q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A),$$

$$(2) \forall a \in \Sigma : (q, \varepsilon) \in \delta(q, a, a)$$

Идея (инварианта): в стека се запомнят правилата на един извод, и при вход на терминален символ го вади от върха на стека.

$G = (V, \Sigma, P, S)$ грамматика с $L(G) = L$.

$M = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S)$ с

$\forall A \longrightarrow \alpha \in P : (q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A)$, $\forall a \in \Sigma : (q, \varepsilon) \in \delta(q, a, a)$

Лема: Ако $w \in \Sigma^*, \alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$, то

$$S \Rightarrow^* w\alpha \iff (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha).$$

Следствие: $\alpha = \varepsilon \longrightarrow S \Rightarrow^* w \iff (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Д-во: Нека $S \Rightarrow^* w\alpha$. Тогава има извод

$u_0 = S \Rightarrow u_1 \cdots \Rightarrow u_n = w\alpha$.

С индукция по дължината на извода ще покажем, че

$(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)$.

$S \Rightarrow^* w\alpha \longrightarrow (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)$

Случай $n = 0$:

$u_0 = S = w\alpha \longrightarrow w = \varepsilon \ \& \ \alpha = S \longrightarrow (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)$.

Случай $n \rightsquigarrow n+1$:

$u_0 = S \Rightarrow u_1 \ldots u_n \Rightarrow u_{n+1} = w\alpha$. Нека $u_n = xA\beta$, $x \in \Sigma^*$,
$u_{n+1} = x\gamma\beta$ и $A \to \gamma \in P$.

Тъй като $u_0 = S \Rightarrow u_1 \cdots \Rightarrow u_n = xA\beta$, то по ИП
$(q, x, S) \vdash^* (q, \varepsilon, A\beta)$.

От $A \to \gamma \in P \longrightarrow (q, \varepsilon, A\beta) \vdash (q, \varepsilon, \gamma\beta)$.

Но $u_{n+1} = w\alpha = x\gamma\beta$, α започва с променлива и $x, w \in \Sigma^*$.
Следователно $w = xy$, $y \in \Sigma^*$, $y\alpha = \gamma\beta$. Така
$(q, w, S) \vdash^* (q, y, \gamma\beta) = (q, y, y\alpha)$. Сега прилагайки y пъти
преходи от тип (2): $(q, w, S) \vdash^* (q, y, y\alpha) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)$.

$(q,w,S) \vdash^* (q,\varepsilon,\alpha) \longrightarrow S \Rightarrow^* w\alpha$

Индукция по броя n на преходите от тип (1).

Случай $n=0$:

$(q,w,S) \vdash^* (q,\varepsilon,\alpha) \longrightarrow w=\varepsilon, \alpha=S \longrightarrow S \Rightarrow^* w\alpha.$

Случай $n \rightsquigarrow n+1$:

$$(q,w,S) \overset{n(1)}{\vdash^*} (q,y,A\beta) \vdash (q,y,\gamma\beta) \overset{(2)}{\vdash^*} (q,\varepsilon,\alpha).$$

$w=xy$, $A \to \gamma \in P$, $\gamma\beta = y\alpha$!.

$(q,x,S) \overset{n(1)}{\vdash^*} (q,\varepsilon,A\beta).$

По ИП $S \Rightarrow^* xA\alpha \Rightarrow x\gamma\beta = xy\alpha = w\alpha \longrightarrow S \Rightarrow^* w\alpha.$

Твърдение: За всеки NstackA с едно състояние

$M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z)$

има граматика G с $L(G) = L(M)$.

Д-во: Нека $G = (\Gamma, \Sigma, P, \#)$ с

$P = \{A \to a\alpha : (z, \alpha) \in \delta(z, a, A)\}$ $a = \varepsilon$ разрешено!

$L(G) \subseteq L(M)$:

$x \in L(G) \longrightarrow \exists$ ляв извод $A = \# \stackrel{*}{\Rightarrow} x$.

За всяко начало w на x, $x = wy$, за извода $\# \stackrel{*}{\Rightarrow} w\alpha$ с

$w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$

$\exists$ редица от конфигурации $(z, x, \#) \vdash \cdots \vdash (z, y, \alpha)$ на M.

$\# \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha \Leftrightarrow (z,x,\#)\vdash \cdots \vdash (z,y,\alpha)$

Индукция по дължината на извода n.

База: $n = 0$. От $\# \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ следва $w = \varepsilon$, $y = x, \alpha = \#(\alpha \in \Gamma^*)$.

Следователно $(z,x,\#)\vdash^*(z,y,\alpha)$.

Индукционна стъпка: $n+1$

$\# \overset{*}{\Rightarrow} wA\beta \Rightarrow wa\gamma\beta.\ a \in \varepsilon \cup \Sigma,, \alpha = \gamma\beta.$

По ИП $\exists$ редица от конфигурации $(z,x,\#)\vdash \cdots \vdash (z,ay,A\beta)$

с $way = x$.

Тъй като $A \to a\gamma \in P$ трябва $(z,\gamma) \in \delta(z,a,A)$.

Така, $(z,ay,A\beta)\vdash(z,y,\gamma\beta)$

$(z,x,\#)\vdash^*(z,y,\gamma\beta) = (z,y,\alpha)$.

Следователно $\# \overset{*}{\Rightarrow} x \longrightarrow (z,x,\#)\vdash^*(z,\varepsilon,\varepsilon)$

$(w = x \Rightarrow y = \varepsilon, \alpha = \varepsilon)$.

$L(M) \subseteq L(G)$:

$x \in L(M) \longrightarrow \exists$ редица от конфигурации

$(z, x, \#) \vdash \cdots \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$

На това съответства ляв извод $A = \# \overset{*}{\Rightarrow} x$.

За всяко начало w на x и $x = wy$

От $(z, x, \#) \vdash^* (z, y, \alpha)$ следва, че съществува извод $\# \overset{*}{\Rightarrow} w\alpha$.

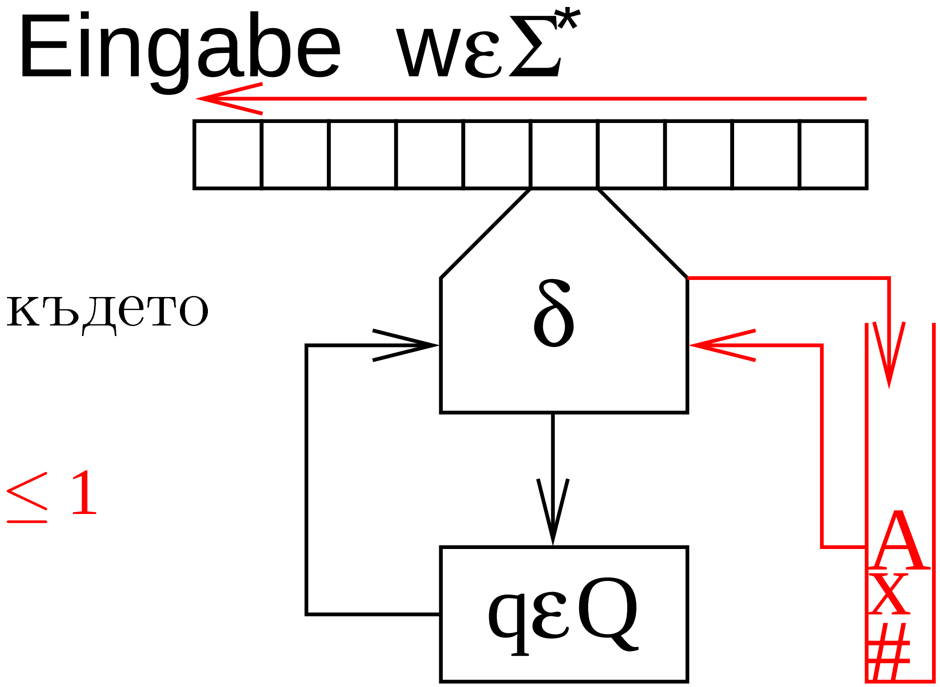
Аналогично.

Така за $w = x$ имаме :

$(z, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \# \overset{*}{\Rightarrow} x$.

1.3.6 Детерминистични контекстно-свободни езици

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$:



- Q, Σ, Γ, s, $\#$ знаем.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, където
  $\forall z \in Q, a \in \Sigma, A \in \Gamma :$
  $$|\delta(z,a,A)| + |\delta(z,\varepsilon,A)| \leq 1$$

K приема $w \in \Sigma^*$, ако

$\exists$ редица от конфигурации (допустими от δ)

$(s,w,\#) \vdash \cdots \vdash (f,\varepsilon,\varepsilon)$ с $f \in F$.

Твърдение:

$\forall$ DstackA $K : \exists$ NstackA с едно състояние $K' : L(K) = L(K')$.

$\exists$ NstackA с едно състояние $K' : \nexists$ DstackA $K : L(K) = L(K')$.

Компилатори

Наблюдение:

Проблемът за принадлежност на дума за DstackA може да се разреши за линейно време.

Забележка:

Езиците разпознаващи се от DstackA са точно $\mathrm{LR}(k)$-езици.

Тези езикови фамилии са основата на синтаксиса на много програмни езици.

Свойства на затвореност за DstackA

Без Д-во:

Затворени относно: $\bar{\cdot}$, сечение с ргулярен език.

Не са затворени относно: $\cup, \cap, \cdot, {}^*$

1.3.7 Разрешими проблеми за контекстно-свободни езици

Проблемът за празнота

Function isEmpty($G = (V, \Sigma, P, S)$)

Marked := Σ

while $\exists A \rightarrow \alpha \in P : A \notin$ Marked $\wedge\, \alpha \in$ Marked* do

Marked := Marked $\cup \{A\}$

return $S \notin$ Marked

Изпълнено е т.т.к. $L(G) = \emptyset$

Проблемът за крайност

Дадено: гарматика $G = (V, \Sigma, P, S)$

Въпрос: $|L(G)| < \infty$?

Нека n е числото от Pumping лемата.

Наблюдение: $|L(G)| = \infty \Leftrightarrow \exists z \in L(G) : n \leq |z| < 2n$

Д-во:

$z \in L(G), n \leq |z| < 2n \longrightarrow$ Pumping лемата дава $|L| = \infty$.

Случай $|L(G)| = \infty$ да разгледаме $z \in L(G)$ с минимална $|z| \geq n$.

Да допуснем, че $|z| \geq 2n$.

$\xrightarrow{\text{Pumping лемата}} z = uvwxy,\ |vx| \geq 1,\ uwy \in L(G),\ |uwy| \geq n.$

Противоречие с минималността на $|z|$.

Проблемът за крайност

Дадено: гарматика $G = (V, \Sigma, P, S)$

Въпрос: $|L(G)| < \infty$?

Нека n е числото от Pumping лемата.

Изпълнено е: $|L(G)| = \infty \Leftrightarrow \exists z \in L(G) : n \leq |z| < 2n$

Пълно изчепване алгоритъм:

Проблемът за принадлежносттс за всички думи z с дължина $n \leq |z| < 2n$.

Време: $\mathcal{O}\left(8 \cdot 2^{3|V|} \cdot |\Sigma|^{2 \cdot 2^{|V|}}\right)$

!

Забележка: Има и по-ефективен алгоритъм.

Разрешими проблеми за DstackA

- Еквивалентност: $L(K_1) = L(K_2)$?

Неразрешими проблеми за CFG

- $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? Нямат общи елементи
- $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?
- $L(G_1) \cap L(G_2)$ контекстно-свободен?
- $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?
- $L(G_1) = L(G_2)$?
- Нееднозначност: $\exists x \in L(G) : |\{\text{syntax tree}(x)\}| \geq 2$
- Дали $\overline{L(G)}$ е контекстно-свободен?
- Дали $L(G)$ е регулярен?
- Дали $L(G)$ е дет. контекстно-свободен?

Неразрешимост на $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Разрешаваме PCP- Post Correspondence System

$K = (x_1, y_1) \cdots (x_k, y_k) \in (\{a,b\}^* \times \{a,b\}^*)^*$ с помощта на disjoint(G_1, G_2):

Дефинираме $\Sigma = \{a, b, 1, \ldots, k\}$

$G_1 = (\{S\}, \Sigma, P_1, S)$,

$G_2 = (\{S\}, \Sigma, P_2, S)$, където

$P_1 = \{S \longrightarrow iSx_i, S \longrightarrow ix_i : i \in 1..k\}$

$P_2 = \{S \longrightarrow iSy_i, S \longrightarrow iy_i : i \in 1..k\}$

$L(G_1) = \{i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} : i_\ell \in 1..k\}$

$L(G_2) = \{i_n \cdots i_1 y_{i_1} \cdots y_{i_n} : i_\ell \in 1..k\}$

$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ т.т.к..

$\exists i_1, \ldots i_n : x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$ т.т.к. K има решение.