Задача 1. Да се докаже, че граматиката $G = (V, \Sigma, S, R)$, $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ и R има следните правила:

$$S \to aB|bA$$

$$A \to bAA|aS|a$$

$$B \to aBB|bS|b$$

генерира думите, в Σ които имат равен брой a и b.

Задача 2. Нека G е граматиката от зад. 1. а) Намерете еквивалентна граматика на G в нормална форма на Чомски.

б) За думата $aaabbabbba$ намерете:

- дърво на извода;
- най-ляв извод;
- най-десен извод.

Еднозначна ли е G?

Задача 3. Да се намери контекстно свободна граматика, генерираща следните езици и стеков атомат, който ги разпознава:

а) L е множеството от всички думи палиндроми ($w = w^R$) в $\Sigma = \{a, b\}$;

б) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ е естествено число записано в десетичен запис и $w \equiv 3(mod 4)\}$;

в) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ има два пъти повече a от $b\}$;

г) $L = \{uawb : u, w \in \{a, b\}^* \mid |u| = |w|\}$;

д) $L = \{wcx\ w, x \in \{a, b\}^* \mid w^R$ е поддума на $x\}$;

е) допълнението на $L = \{a^n b^m \mid m, n \in \mathbf{N}\ \&\ m = n\}$.

Задача 4. Нека C е контекстно свободен език и L е регулярен език. Да се докаже, че $C \cap L$ е контекстно свободен.

Задача 5. Нека $G = (V, \Sigma, S, R)$, $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ и R има следните правила:

$$S \to aSa|bSb|aSb|bSa|\epsilon$$

Докажете, че $L(G)$ е регулярен.

Задача 6. Една конекстно свободна граматика се нарича регулярна, ако има само правила от вида

$$A \to wB$$

$$A \to w$$

където A, B са нетерминали и w е дума от Σ^*.

а) Нека $G = (V, \Sigma, S, R)$, $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ и R има следните правила:

$$S \to abA|B|baB|\epsilon$$

$$A \to bS|b$$

$$B \to aS$$

Намерете краен автомат , такъв че $L(M) = L(G)$.

б)Докажете, че един език е регулярен точно тогава, когато има регулярна граматика, която го генерира.

Задача 7. Да се докаже, че следните езици не са контекстно свободни:

а)$L = \{a^n b^m c^k \mid n < n < k\}$;

б)$L = \{a^n b^m \mid m = n^2\}$;

в)$L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbf{N}\}$;

г) $L = \{www \mid w \in \{a, b\}^*\}$;

д) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ има равен брой a b и $c\}$.

е) $L = \{wcx\ w, x \in \{a, b\}^* \mid w$ е поддума на $x\}$.

Задача 8. Нека h е хомоморфизъм от Σ към Δ^*.

а) Нека L е контекстно свободен език над Σ. Докажете, че $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ е контекстно свободен език;

б) Нека L е контекстно свободен език над Δ. Докажете, че $h^{-1}(L) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \&\ h(w) \in L\}$ е контекстно свободен език.

Задача 9. Нека L_1 е контекстно свободен и L_2 е регулярен език над Σ. Да се докаже, че:

а) $L_1/L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid (\exists u \in L_2)(wu \in L_1)\}$ е контекстно свободен ;

б) $L = \{a^p b^n \mid p$ е просто и $n > p\}$ не е контекстно свободен .