Домашно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2013г.

ТЕМА: МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА
РЕШЕНИЯ

Задача 1: (14т.) Използвайте табличния метод за да проверите истинността на следните твърдения:

а) (7т.) $(A \cap B) \cup \overline{(B \cap C)} \supseteq A \cup \overline{B}$

Решение:

A	B	C	$A \cap B$	$\overline{(B \cap C)}$	$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \overline{(\mathbf{B} \cap \mathbf{C})}$	$\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{B}}$
0	0	0	0	1	**1**	**1**
0	0	1	0	1	**1**	**1**
0	1	0	0	1	**1**	**0**
0	1	1	0	0	**0**	**0**
1	0	0	0	1	**1**	**1**
1	0	1	0	1	**1**	**1**
1	1	0	1	1	**1**	**1**
1	1	1	1	0	**1**	**1**

Заключение: Твърдението е вярно, тъй като на всеки ред стойността в предпоследната колона е по-голяма или равна на стойността в последната колона.

б) (7т.) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

Решение:

A	B	$A \triangle B$	$A \cap B$	$(\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$	$A \cup B$	$A \cup \overline{B}$	$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{B}})$
0	0	0	0	**0**	0	1	**0**
0	1	1	0	**1**	1	0	**0**
1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	1	**1**

Заключение: Твърдението не е вярно, тъй като двете отбелязани колони са различни.

Задача 2: (12т.) Намерете степенното множество на всяко от следните множества:

а) (4т.) $\{x, \{x\}\}$
Решение: $2^{\{x,\{x\}\}} = \{\emptyset, \{x\}, \{\{x\}\}, \{x, \{x\}\}\}$

б) (4т.) J_3
Решение: $2^{J_3} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

в) (4т.) $2^{\emptyset}$
Решение: $2^{2^{\emptyset}} = 2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Задача 3: (16т.)Нека $U = \mathbb{R}$, $A = \{x|x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $B = \{x|x \in \mathbb{R} : x > 3\}$ и $C = \{x|x \in \mathbb{R} : x < 7\}$. Определете елементите на всяко от множествата:

а) (2т.) $A \cup B = \{x|x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
б) (2т.) $B \cup C = \mathbb{R}$
в) (2т.) $A \cap B = \{x|x \in \mathbb{R} : x > 3\}$
г) (2т.) $B \backslash C = \{x|x \in \mathbb{R} : x \geqslant 7\}$
д) (2т.) $\overline{B} = \{x|x \in \mathbb{R} : x \leqslant 3\}$
е) (2т.) $\overline{C} = \{x|x \in \mathbb{R} : x \geqslant 7\}$
ж) (2т.) $A \cap C = \{x|x \in \mathbb{R} : 0 < x < 7\}$
з) (2т.) $A \Delta B = \{x|x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant 3\}$

Задача 4: (16т.) Проверете истинността на всяко от следните твърдения. За доказване на равенство на множества използвайте аксиомата за обема.

а) (8т.) $(A \setminus \overline{B}) \cup (A \setminus \overline{C}) = A \cap (B \cup C)$

Решение:
Ще докажем, че: $\forall x (x \in (A \setminus \overline{B}) \cup (A \setminus \overline{C}) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C))$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus \overline{B}) \cup (A \setminus \overline{C}) \Leftrightarrow &\quad \text{дефиниция на обединение} \\
(x \in A \setminus \overline{B}) \vee (x \in A \setminus \overline{C}) \Leftrightarrow &\quad \text{дефиниция на разлика} \\
((x \in A) \wedge (x \notin \overline{B})) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin \overline{C})) \Leftrightarrow &\quad \text{дефиниция на допълнение} \\
((x \in A) \wedge (x \in \overline{\overline{B}})) \vee ((x \in A) \wedge (x \in \overline{\overline{C}})) \Leftrightarrow &\quad \text{свойство на допълнението} \\
((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow &\quad \text{дистрибутивност на } \wedge \text{ над } \vee \\
(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow &\quad \text{дефиниция на обединение} \\
(x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \Leftrightarrow &\quad \text{дефиниция на сечение} \\
x \in A \cap (B \cup C) &
\end{aligned}
$$

Следователно, множеството $(A \setminus \overline{B}) \cup (A \setminus \overline{C})$ съвпада с множеството $A \cap (B \cup C)$.

б) (8т.) $A \setminus \overline{(B \cup C)} = A \cup (B \cap C)$

Решение:

Твърдението не е вярно. Следва контрапример:

Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, $C = \{3, 4\}$ $\mathsf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогава

$A \setminus \overline{(B \cup C)} = \{2, 3\}$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\}$

Следователно, множествата, представени с изразите $A \setminus \overline{(B \cup C)}$ и $A \cup (B \cap C)$ са различни.

Задача 5: (10т.) Конструирайте таблицата на истинност за всяко от следните съставни съждения:

а) (5т.) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

б) (5т.) $(p \vee q) \to (p \oplus q)$

Решение:

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$	$(p \vee q) \to (p \oplus q)$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	F

Задача 6: (10т.)За всяко p и q

$p|q \equiv \neg(p \wedge q)$,

$p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$

Докажете, че:

а) (5т.) $\neg(p \downarrow q) \equiv (\neg p)|(\neg q)$

Решение:

p	q	$p \downarrow q$	$A = \neg(p \downarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$B = (\neg p)\|(\neg q)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T

Изразите са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

б) (5т.) $\neg(p|q) \equiv (\neg p) \downarrow (\neg q)$

Решение:

p	q	$p\|q$	$A = \neg(p\|q)$	$\neg p$	$\neg q$	$B = (\neg p) \downarrow (\neg q)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	T	F	T	F	F	T	T

Изразите са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

Задача 7: (10т.) Използвайки табличния метод, проверете валидността на еквивалентностите:

а) (5т.) $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

Решение:

p	q	r	$q \wedge r$	$A = p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$B = (p \to q) \wedge (p \to r)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Изразите са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

б) (5т.) $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \to \neg r$

Решение:

p	q	r	$q \vee r$	$A = p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$\neg r$	$B = (p \to q) \to \neg r$	$A \leftrightarrow B)$
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	F	F	F

Изразите не са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ не е тавтология.

Задача 8: (12т.) Използвайки табличния метод, проверете валидността на изводите:

а) (6т.)
$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ r \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

б) (6т.)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \to r \\ \neg q \\ p \to \neg r \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg q \end{array}$$

Решение на а):

p	q	r	$p \to q$	$A = p \wedge (p \to q) \wedge r$	$p \vee q$	$B = (p \vee q) \to r$	$A \to B$
F	F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T

Изводът е валиден, защото $A \to B$ е тавтология.

Решение на б):

p	q	r	$A = (p \wedge q) \to r$	$B = p \to (\neg r)$	$C = A \wedge (\neg q) \wedge B)$	$D = (\neg p) \vee (\neg q)$	$C \to D$
F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	F	F	F	T

Изводът е валиден, защото $C \to D$ е тавтология.