Домашно №2 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2013г.

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ. КОМБИНАТОРИКА РЕШЕНИЯ

Задача 1: (10т.) Използвайте метода на математическата индукция за да докажете следното твърдение:

$3 + 11 + ... + (8n - 5) = 4n^2 - n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Решение:

1. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n = 1$
   Наистина: $3 = 4 - 1$
2. Допускаме, че твърдението е вярно за някое число $k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$
3. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k + 1$. Наистина:
   $3 + 11 + ... + (8k - 5) + (8(k + 1) - 5) =$
   $= 4k^2 - k + (8k + 3) = 4k^2 + 7k + 3 =$
   $= 4k^2 + 8k + 4 - (k + 1) = 4(k + 1)^2 - (k + 1)$
4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко число $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Задача 2: (10т.) Използвайте метода на математическата индукция за да докажете следното твърдение:

$2^n > n^2, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$

Решение:

1. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n = 5$
   Наистина: $2^5 > 5^2$
2. Допускаме, че твърдението е вярно за някое число $k, k \in \mathbb{N}, k \geq 5$
3. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k + 1$. Наистина:
   $2^{(k+1)} = 2.2^k > k^2 + k^2 > k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$
4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко число $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$

Задача 3: (12т.) Релацията R в множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ е определена по следния начин: $R = \{(x, y) | x - y$ е четно число$\}$. Докажете, че R е релация на еквивалентност и намерете класовете й на еквивалентност.

<u>Решение:</u>

1. Релацията R е рефлексивна. Нистина, $\forall x \in \mathbb{Z} : xRx$, тъй като $x - x$ е четно число.

2. Релацията R е симетрична, защото: за всеки два елемента x и y на множеството $\mathbb{Z}$, ако xRy , т.е. $x - y = 2k$, то $y - x = -2k$, следователно yRx.

3. Релацията R е транзитивна. Нека x, y, z са елементи на множеството $\mathbb{Z}$, такива че xRy и yRz, т.е. $x - y = 2k$ и $y - z = 2r$. Тогава, $x - z = x - y + y - z = 2t$ следователно xRz.

От доказаното в т.1, т.2 и т.3 следва, че R е релация на еквивалентност.

Разглеждаме $0 \in \mathbb{Z}$. Нека $x \in \mathbb{Z}$ е произволно четно число. Тогава $0 - x = -x$ също е четно число $\Rightarrow R_{[0]} = \{x \in \mathbb{Z} |$ x четно число$\}$.

Разглеждаме $1 \in \mathbb{Z}$. Нека $x \in \mathbb{Z}$ е произволно нечетно число. Тогава $1 - x$ е четно число $\Rightarrow R_{[1]} = \{x \in \mathbb{Z} |$ x нечетно число$\}$.

Следователно, класовете на еквивалентност на релацията R са множествата $R_{[0]}$ и $R_{[1]}$.

Задача 4: (12т.) Дадено е множеството $A = \{a, b, c, d\}$ и дефинираната в него бинарна релация:

$R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b), (c, d), (d, d)\}$

а)(4т.) Представете релацията с матрица;

<u>Решение:</u> Следната матрица представя горната релация:

	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	0	0
c	1	1	1	1
d	0	0	0	1

б)(6т.) Изследвайте свойствата на релацията;

<u>Решение:</u>

1. Релацията е рефлексивна, защото всеки елемент на множеството A е в релация със себе си.

2. Релацията не е симетрична, защото съществуват елементи $a \in A$ и $b \in A$ такива, че $(a,b) \in R$, а $(b,a) \notin R$.

3. Релацията е антисиметрична, защото за всеки два елемента x и y на множеството A, ако $(x,y) \in R$ и $(y,x) \in R$, то $x = y$.

4. Релацията не е силно антисиметрична, защото съществуват два различни елемента $b \in R$ и $d \in R$, такива че $(b,d) \notin R$ и $(d,b) \notin R$.

5. Релацията е транзитивна, защото за всеки три елемента x, y, z на множеството A, ако $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R$, то $(x,z) \in R$.

в)(2т.) Определете вида на релацията.

Решение: Релацията е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, следователно е релация на частична наредба.

Задача 5: (10т.) Докажете, че функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ е биекция, където:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{ако } x \text{ е четно} \\[2ex] \dfrac{x+1}{2} & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Решение: Функцията е биекция, ако е инекция и сюрекция.

1. Ще докажем, че функцията е инекция, т.е. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

   Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2)$. От $f(x_1) = f(x_2)$ следва, че x_1, x_2 са едновременно или четни или нечетни.

   а) x_1, x_2 - четни $\Rightarrow -\dfrac{x_1}{2} = -\dfrac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$

   б) x_1, x_2 - нечетни $\Rightarrow \dfrac{x_1+1}{2} = \dfrac{x_2+1}{2} \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

   Следователно, функцията е инекция.

2. Ще докажем, че функцията е сюрекция, т.е. $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{N}$, такова че $f(x) = y$.

   Нека $y \in \mathbb{Z}$.

   а) $y \leq 0$: $-\dfrac{x}{2} = y \Rightarrow x = -2y$.

   $y \in \mathbb{Z}, y \leq 0 \Rightarrow -2y \in \mathbb{Z}, -2y \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}, f(-2y) = -\dfrac{-2y}{2} = y$.

б) $y \geq 1$: $\dfrac{x+1}{2} = y \Rightarrow x = 2y - 1$.

$y \in \mathbb{Z}, y \geq 1 \Rightarrow 2y-1 \in \mathbb{Z}, 2y-1 \geq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{N}, f(2y-1) = \dfrac{2y-1+1}{2} = y$.

Следователно, функцията е сюрекция.

Следователно, функцията е биекция.

Задача 6: (15т.) Нека A е множеството на всички двоични низове с дължина най-много 10, а $\mathbb{N}$ - множеството на естествените числа. Функцията $f : A \to \mathbb{N}$ съпоставя на всеки двоичен низ число такова, че двоичният низ е негово представяне в двоична позиционна бройна система.

а)(9т.) Проверете дали функцията е инекция и сюрекция;

Решение: Функцията не е инекция, защото съществуват два елемента на дефиниционното множество, чиито образи съвпадат. Пример за това са двоичните низове $''10''$ и $''0010''$. $f(''10'') = f(''0010'') = 2$.

Функцията не е сюрекция. Числото 2^{10} няма първообраз в множеството A. Наистина, най-голямото число, чийто двоичен запис има не повече от 10 цифри, е $2^{10} - 1$.

б)(6т.) Намерете множество $B \subseteq \mathbb{N}$ такова, че функцията $f : A \to B$ е сюрекция.

Решение: Нека множеството B е определено по следния начин:

$B = \{x | x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 2^{10} - 1\}$

Функцията $f : A \to B$ е сюрекция. Нека $x \in B$, а α е представянето на x в двоична позиционна бройна система без водещи нули. $\alpha \in A$, тъй като всяко естествено число $x < 2^{10}$ се представя в двоична позиционна бройна система с най-много 10 значещи цифри, и $f(\alpha) = x$.

Следователно, функцията $f : A \to B$ е сюрекция.

Задача 7: (14т.) Дадена е колода от 52 карти, от която се правят извадки, които са ненаредени конфигурации без повторение.

а) (7т.) Да се определи броят на извадките от 8 карти, като всяка извадка съдържа по 2 карти от всеки цвят

Решение: Две пики може да се изберат по $\binom{13}{2}$ начина. За всеки избор на пики две спатии може да се изберат по $\binom{13}{2}$ начина. За всеки избор на пики и спатии две кари може да се изберат по $\binom{13}{2}$ начина. За всеки избор на пики, спатии и кари две купи може да се изберат по $\binom{13}{2}$ начина.

Следователно, броят на извадките, отговарящи на условието, е

$$\binom{13}{2}^4 = \left(\frac{13!}{2! \times 11!}\right)^4 = \left(\frac{13 \times 12}{2}\right)^4 = 78^4 = 37015056.$$

б) (7т.) Да се определи по колко начина може да се раздадат всичките карти на 5 играча $p_1, p_2, ..., p_5$, така че всеки от p_1 и p_2 да получи по 15 карти, p_3 да получи 5 карти, p_4 да получи 8 карти и p_5 да получи 9 карти

<u>Решение:</u> Първият играч може да получи 15 карти от 52 карти по $\binom{52}{15}$ начина. За всеки избор на 15 карти за p_1 вторият играч може да получи 15 карти от останалите 37 карти по $\binom{37}{15}$ начина. За всеки избор на 30 карти за p_1 и p_2 третият играч може да получи 5 карти от останалите 22 карти по $\binom{22}{5}$ начина. За всеки избор на 35 карти за p_1, p_2 и p_3 четвъртият играч може да получи 8 карти от останалите 17 карти по $\binom{17}{8}$ начина. За всеки избор на 43 карти за p_1, p_2, p_3 и p_4 петият играч може да получи 9 карти от останалите 9 карти по $\binom{9}{9}$ начина.

Следователно, 52 карти може да се раздадат на 5 играча, съгласно условието, по $\binom{52}{15} \times \binom{37}{15} \times \binom{22}{5} \times \binom{17}{8} \times \binom{9}{9} =$
$$= \frac{52!}{15! \times 37!} \times \frac{37!}{15! \times 22!} \times \frac{22!}{5! \times 17!} \times \frac{17!}{8! \times 9!} \times \frac{9!}{9! \times 0!} =$$
$$= \frac{52!}{15! \times 15! \times 5! \times 8! \times 9!}$$ начина.

Задача 8: (17т.) Дадена е азбуката $A = \{a, b, c\}$. Да се намери броят на думите с дължина 10 над тази азбука, които изпълняват следните условия:

а) (10т.) Броят на буквите a е по-голям от броя на буквите b.

<u>Решение:</u> Тъй като броят на буквите a е по-голям от този на буквите b, следва, че този брой е в границите от 1 до 10.

Да разгледаме случая, в който броят на буквите a е точно k. За да получим всички различни думи, отговарящи на тези условия, първо ще разположим в десетте позиции на думата общо k букви a. Това може да стане по $\binom{10}{k}$ начина. Когато броят на буквите a е k, то броят на буквите b може да е в границите от 0 до $min\big((k-1), (10-k)\big)$. Броят на думите, в които има точно k букви a и точно i букви b е $\binom{10}{k}.\binom{10-k}{i}$. Така можем да намерим броя на всички думи с точно k букви a, а именно: $\binom{10}{k}. \sum_{i=0}^{min\big((k-1),(10-k)\big)} \binom{10-k}{i}$.

Сега можем за намерим броя на всички думи от условието като оставим k да се мени в границите от 1 до 10:

$\sum_{k=1}^{10} \left(\binom{10}{k}. \sum_{i=0}^{k-1} \binom{10-k}{i}\right)$

Забележка: Замяната на горната граница във вътрешната сума е коректна поради следната дефиниция:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ако } 0 \leq k \leq n \\ \\ 0 & \text{ако } 0 \leq n < k \end{cases}$$

б) (7т.) Всяка дума съдържа 3 букви a и буквите на думата са в ненамаляващ ред.

Решение: Пред вид изискването за наредба на буквите следва, че трите букви a са в началото на думата. След тях са разположени буквите b, а на края са всички букви c. И така думите, които ни интересуват се определят еднозначно от броя на буквите b в думата. Броят на незаетите с букви a позиции в думата е 7 и в тях могат да се разполжат от 0 до 7 букви b.

Следователно, броят на думите, които отговарят на услонието на задачата е 8.