Домашно №3 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2013г.

ТЕМА: КОМБИНАТОРИКА
РЕШЕНИЯ

Задача 1: (15т.) Определете броя на думите, които се получават чрез разместване на малките букви на българската азбука, всяка от които не съдържа като поддума никоя от думите: *нула*, *едно*, *две* и *три*.

Решение: Нека U е множеството от всички думи, които се получават чрез разместване на буквите, $A_0 \subseteq U$ - множеството от думите, които съдържат поддума *нула*, $A_1 \subseteq U$ - множеството от думите, които съдържат поддума *едно*, $A_2 \subseteq U$ - множеството от думите, които съдържат поддума *две*, $A_3 \subseteq U$ - множеството от думите, които съдържат поддума *три*. Тогава, думите, чиито брой търсим, са елементите на множеството $U \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ и съгласно Принципа на включването и изключването техният брой е: $|U \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3)| =$

$$= |U| - (|A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3|)+$$
$$+(|A_0 \cap A_1| + |A_0 \cap A_2| + |A_0 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)-$$
$$-(|A_0 \cap A_1 \cap A_2| + |A_0 \cap A_1 \cap A_3| + |A_0 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)+$$
$$+|A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$
$$= 30! - (27!+27!+28!+28!) + (0+25!+25!+0+25!+26!) - (0+0+23!+0) + 0 =$$
$$= 30! - 18 \times 27! + 9 \times 25! - 23!.$$

Задача 2: Картина от n различни фигури се оцветява, като за всяка фигура се използва един от k различни цвята. Определете:

а)(10т.) За какви стойности на k е сигурно, че както и да се оцвети картината, поне един цвят ще е използван за поне четири фигури;

Решение: Нека $P, |P| = n$, е множеството от фигурите, $C, |C| = k$, е множеството от цветовете и $f : P \to C$ съпоставя на всяка фигура цвят. Тогава, съгласно Обобщения принцип на Дирихле, поне един цвят ще е използван за поне четири фигури, ако $n > 3k$.

б)(15т.) При колко от различните оцветявания на картината, всеки цвят е използван поне веднъж;

Решение: Нека $C = \{c_1, ..., c_k\}$ е множеството от цветовете, U - мно-

жеството от всички оцветявания на картината, $A_i \subseteq U$ - множеството от оцветяванията, при които цвят $c_i, i \in [1;k]$, не е използван. Тогава, оцветяванията, чиито брой търсим, са елементите на множеството $U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ и съгласно Принципа на включването и изключването техният брой е:
$|U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i| = |U| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \sum_{1\le i_1<i_2\le k} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + ...+$
$+(-1)^p \sum_{1\le i_1<...<i_p\le k} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_p}| + ... + (-1)^k |A_1 \cap ... \cap A_k| =$
$= k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + ... + (-1)^p \binom{k}{p}(k-p)^n + ... + (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n =$
$= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \binom{k}{p}(k-p)^n$

в)(5т.) По колко начина може да се оцвети картината в два различни цвята c_1 и c_i, $i \in [2;k]$ така, че за всяко от тези оцветявания цвят c_1 е използван за m фигури, а цвят c_i е използван за останалите фигури.

Решение: m фигури за цвят c_1 може да се изберат по $\binom{n}{m}$ начина. За всеки избор останалите фигури по единствен начин се оцветяват в един и същ цвят, който може да се избере по $\binom{k-1}{1}$ начина. Следователно, броят на оцветяванията, които отговарят на условието, е: $\binom{n}{m} \times (k-1)$.

Задача 3: (15т.) Нека $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$. Да се намери броят на векторите, принадлежащи на B^n, сравними с вектор $\widetilde{\alpha}$.

Решение: Нека $U \subseteq B^n$ е множеството от вектори, сравними с вектор $\widetilde{\alpha}$ и $U = A \cup B$, където $A = \{\widetilde{\beta} \in B^n : \widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}\}$ и $B = \{\widetilde{\gamma} \in B^n : \widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\gamma}\}$.От това, че $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$ следва, че той е от вида:

$$\underbrace{0...0}\overset{i_1}{1}\underbrace{0...0}\overset{i_2}{1}\underbrace{0...0}...\underbrace{0...0}\overset{i_k}{1}\underbrace{0...0}$$

Тогава всеки вектор от множеството A е от вида:

$$\underbrace{0...0}\sigma_{i_1}\underbrace{0...0}\sigma_{i_2}\underbrace{0...0}...\underbrace{0...0}\sigma_{i_k}\underbrace{0...0}$$

и всеки вектор от множеството B е от вида:

$$\underbrace{\sigma_1...\sigma_{i_1-1}}1\underbrace{\sigma_{i_1+1}...\sigma_{i_2-1}}1\underbrace{\sigma_{i_2+1}...\sigma_{i_3-1}}...\underbrace{\sigma_{i_{k-1}+1}...\sigma_{i_k-1}}1\underbrace{\sigma_{i_k+1}...\sigma_n}$$

Следователно, $|U| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^k + 2^{n-k} - 1$.

Задача 4: (15т.) Да се намери броят на векторите $\widetilde{\alpha} \in B^{11}$, такива че $|\widetilde{\alpha}| = 5$, $\nu(\widetilde{\alpha}) > 2^5$.

Решение: Нека $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{11})$ е произволен вектор, изпълняващ условието. Тъй като представянето на 2^5 в двоична позиционна бройна система е 100000, то за да бъде изпълнено условието $\nu(\widetilde{\alpha}) > 2^5$, трябва векторът $\widetilde{\alpha}$ да има поне една единица в някоя от позициите от α_1 до

α_6. Нека има k единици в позициите от 1 до 6, тяхното разполагане може да стане по C_6^k начина. Останалите $5-k$ единици се разполагат в позициите от 7 до 11, което става по C_5^{5-k} начина. И така, като вземем пред вид, че общият брой на единиците е 5, то общият брой на векторите, изпълняващи условието е $\sum_{k=1}^{5} C_6^k.C_5^{5-k} = \sum_{k=1}^{5} \binom{6}{k}.\binom{5}{5-k} = 461$.

Задача 5: В кутия има пет еднакви бели топки, 7 еднакви зелени топки и десет червени топки, надписани с числата от 1 до 10. От кутията се изваждат 12 топки. В колко от възможните извадки:

а)(12т.) има точно 5 червени топки;

Решение: Червените топки са различно надписани, следователно те са различими, противно на белите и зелените топки. Тъй като трябва да изберем 5 от общо десетте червени топки, то това може да стане по C_{10}^5 начина. Останалите 5 топки в извадката трябва да са измежду неразличимите бели и зелени топки. Тъй като белите топки са точно 5, то възможностите да изберем 5 топки измежду белите и зелените са общо 6, съответно съдържащи 0, 1, 2, 3, 4 или 5 бели топки. И така, всеки избор на 5 червени топки може независимо да се съчетае с шестте възможни избора на бели и зелени топки. Така общият брой на търсените извадки е $C_{10}^5.6 = \binom{10}{5}.6 = \dfrac{10!}{5!.5!}.6 = 1512$.

б)(2т.) няма червена топка;

Решение: Извадка, която не съдържа червена топка, трябва да включва всички бели и зелени топки, защото те са общо 12, от което следва, че съществува единствена такава.

в)(15т.) има бяла топка, зелена топка и поне 6 червени топки.

Решение: Да дефинираме разбиване на множеството на всички извадки в зависимост от броя на червените топки в извадката: $A = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$, $A_i = \{$*извадките, които съдържат* $i+5$ *червени топки*$\}$. За да намерим мощността на множеството A_i разсъждаваме така: всяка извадка от A_i съдържа точно $i+5$ червени топки, които можем да изберем по C_{10}^{i+5} начина. Добавяме една бяла и една зелена топка, с което са изпълнени изискванията за съответната извадка. Остава да добавим още $12-((i+5)+2) = 5-i$ топки, избирайки измежду неразличимите 4 бели и 6 зелени топки. По аналогия с точка а) да разделим случаите съобразно броя на добавените бели топки: тъй като този брой може да бъде от 0 до $5-i$, то броят на начините, по които можем да добавим бели и зелни топки е $5-i+1 = 6-i$. Сега можем да пресметнем мощността на множеството, която ни интересува:

$|A| = \sum_{i=1}^{5}|A_i| = \sum_{i=1}^{5} C_{10}^{i+5}.(6-i) = \sum_{i=1}^{5}\binom{10}{i+5}.(6-i) = 1686$

Задача 6: (16т.) Около кръгла маса седят дванадесет философа. Пред всеки от тях има чиния, между всеки две чинии има една вилица, а в средата на масата има голяма купа спагети. Времето на философите минава така: те мислят, при което огладняват, тогава посягат към спагетите за да се нахранят. Но всеки има нужда от две вилици за да може да яде спагети. При това очевидно двама души, които са съседи на масата, не могат да се хранят едновременно, а максималният брой философи, които могат едновременно да ядат спагети е 6. Намерете броя на всички пет елементни подмножества на философското общество, такива, че членовете на това подмножество могат да се хранят по едно и също време.

Решение: Ще сведем задачата до намиране на броя на двоични вектори с фиксирана дължина и фиксиран брой единици, в които след всяка единица има нула.

Да означим множеството на всички философи с P. Да изберем един от философите, например $PhilX$ и да разбием множеството от петелементните подмножества на P, в които няма съседи от масата, на две подмножествата: $P_5 = A' \cup A''$, определени така:

$A' = \{A | A \subseteq P, |A| = 5, PhilX \in A\}$

$A'' = \{A | A \subseteq P, |A| = 5, PhilX \notin A\}$

Сега мислено да разкъсаме кръга около масата и да разгледаме седящите там като наредена последователност от философи, начело с $PhilX$. Първо ще търсим $|A'|$, т.е. броя на петелементните подмножества, в които няма съседи, освен това първият винаги участва, а вторият и последният не участват. Характеристичният вектор на всяко такова множество съдържа пет единици, първият елемент винаги е единица, вторият и последният са нули.

	1	2	3 . . . 10	11	12
b:	1	0	. . .	...	0

Сега можем да игнорираме фиксираните първа и втора позиция и да преброим само векторите с дължина 10 и четири единици, такива че след всяка единица има нула. За целта групираме всяка от единиците с по една нула, получавайки нов елемент X и броим векторите, които съдържат 4 елемента X и 2 елемента нула, а те са $C_6^4 = C_6^2 = \binom{6}{2} = 15$.

Аналогично ще намерим $|A''|$. Характеристичният вектор на всяко подмножество, което е елемент на A'', има пет единици и след всяка единица има нула.

	1	2	3 . . .	10	11	12
b:	...	...	. . .		...	0

Разсъждавайки като в предния случай, намираме, че броят на тези подмножества е $C_7^5 = C_7^2 = \binom{7}{2} = 21$.

Вече можем да намерим мощността на цялото множество:

$|P_5| = |A'| + |A''| = 15 + 21 = 36$