**Деф.**
Ще казваме, че $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично неотрицатлна, ако $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) \geq 0$.

**Деф.**
Ще казваме, че $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна, ако $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) > 0$.

**Деф.**
Нека $g$ е асимптотично неотрицателна ф-я. Въвеждаме следните класове от функции:
- $O(g) = \{f \mid \exists\, c > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq f(n) \leq c * g(n)\}$ //$\preccurlyeq$
- $o(g) = \{f \mid \forall\, c > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq f(n) \leq c * g(n)\}$ //$\prec$
- $\Omega(g) = \{f \mid \exists\, c > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c * g(n) \leq f(n)\}$ //$\succcurlyeq$
- $\omega(g) = \{f \mid \forall\, c > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c * g(n) \leq f(n)\}$ //$\succ$
- $\theta(g) = \{f \mid \exists\, c_1,\, c_2\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)\}$ //$\asymp$

**Озн.**
- $f \in O(g) \equiv f = O(g) \equiv f \preccurlyeq g$
- $f \in o(g) \equiv f = o(g) \equiv f \prec g$
- $f \in \Omega(g) \equiv f = \Omega(g) \equiv f \succcurlyeq g$
- $f \in \omega(g) \equiv f = \omega(g) \equiv f \succ g$
- $f \in \theta(g) \equiv f = \theta(g) \equiv f \asymp g$

**Св-ва**
1. $f\, \sigma\, g\ \&\ g\, \sigma\, h \Rightarrow f\, \sigma\, h,\ \sigma \in \{\preccurlyeq,\ \prec,\ \asymp,\ \succ,\ \succcurlyeq\}$

2. $f\, \sigma\, f,\ \sigma \in \{\preccurlyeq,\ \asymp,\ \succcurlyeq\}$

3. $f \preccurlyeq g\ \&\ f \succcurlyeq g \Rightarrow f \asymp g$

4. $f \asymp g \Leftrightarrow g \asymp f$

5. $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow g \succcurlyeq f$ //същото и за $\prec$ и $\succ$

6. $\max\{f,\ g\} \asymp f + g$
$\frac{f(n)}{2} + \frac{g(n)}{2} \leq \max\{f(n),\, g(n)\} \leq f(n) + g(n)$

7. Нека $f$ и $g$ са ас.пол. Тогава $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f = o(g)$
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0 : -\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$ .. умножаваме по $g(n)$ и получаваме $-\epsilon * g(n) < 0 \leq f(n) \leq \epsilon * g(n)$

8. Нека $f$ и $g$ са ас.пол. Тогава $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \Rightarrow f = \theta(g)$
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq$
$n_0 : c - \epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \epsilon$ .. умножаваме по $g(n)$ и получаваме $-\ 0 \leq (c - \epsilon) * g(n) \leq f(n) \leq (c + \epsilon) * g(n)$
Обратното **не** е вярно... $f(n) = (2 + \sin(n)) * n,\ g(n) = n$ .. тук лимеса е недефиниран

9. Нека $f$ и $g$ са ас.пол. и $a > 1$. Тогава, ако $g$ не е ограничена отгоре, то :
$a)\ f \prec g \Rightarrow a^{f(n)} \prec a^{g(n)}$
$b)\ \log_a(f(n)) \prec \log_a(g(n)) \Rightarrow f(n) \prec g(n)$

10. $\forall\, a > 1\ \forall\, t,\, \epsilon > 0$ е изпълнено $\log_a^t(n) \prec n^\epsilon$

**Зад. 1**

Нека $p(x) = a_0\, x^k + \ldots + a_k\; -$ асимптотично положителен полином. Тогава $p(n) \asymp n^k$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{a_0\, n^k}{n^k} + \frac{a_1\, n^{k-1}}{n^k} + \ldots + \frac{a_k}{n^k} \right) =$ .

$\lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{n} + \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k} = a_0 > 0 \Rightarrow p(n) = \theta\left(n^k\right)$ .. т.е $p(n) \asymp n^k$

**Зад. 2**

Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Тогава е вярно $\binom{n}{k} \asymp n^k$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k\, k!} = \frac{1}{k!} > 0 \overset{\text{св}.8}{\Rightarrow} \ldots$

**Зад. 3**

$(n+1)^n \asymp n^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 0 \overset{\text{св}.8}{\Rightarrow} \ldots$

**Зад. 4**

$g(n) = n$

$f(n) = \begin{cases} 1 & , n \equiv 0\ (2) \\ n^2 & , n \equiv 1\ (2) \end{cases}$

Да се докаже, че 2-те ф-ии са несравними.

.. за вкъщи

**Зад. 5**

$f = O(g) \neg\Rightarrow (f = o(g) \vee f = \theta(g))$

Даваме пример:

$g(n) = n$

$f(n) = \begin{cases} n & , n \equiv 0\ (2) \\ 1/n & , n \equiv 1\ (2) \end{cases}$

**Зад. 6**

Да се сортират по $\prec$ следните ф – ии : $n^3$, $\sqrt{n}$, $\log(n)$, $\log^2(n)$, $\log^{(2)}(n)$, $n!$, $a^n$, $a$, $n^n$, $n^{-2}$, $n^2$, $n^{\log(n)}$

..за вкъщи.. ще довършим следващия път.