Прости суми, които можем да ползваме наготово:

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n = \theta(n)$
- $\sum_{i=c}^{n} 1 = n - c + 1 = \theta(n)$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \theta\left(n^2\right)$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \theta\left(n^3\right)$
- $\sum_{i=1,\, i+=k}^{n} 1 \approx \frac{n}{k} = \theta\left(\frac{n}{k}\right)$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \theta(ln(n))$

- $\sum_{i=1}^{n} \theta(1) = \theta(n)$
- $\sum_{i=c}^{n} \theta(1) = \theta(n)$
- $\sum_{i=1}^{n} \theta(i) = \theta\left(n^2\right)$
- $\sum_{i=1}^{n} \theta\left(i^2\right) = \theta\left(n^3\right)$
- $\sum_{i=1,\, i+=k}^{n} \theta(1) = \theta\left(\frac{n}{k}\right)$
- $\sum_{i=1}^{n} \theta\left(\frac{1}{i}\right) = \theta(ln(n))$

Интегрален критерий (частен случай)

Нека f е асимптотично положителна функция. Нека $n_0 : \forall\, n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) > 0$.

Нека $\exists\, m > 0\ \exists\, M > 0\ \forall\, n \geq n_0 : m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n)$.

Тогава е в сила $\sum_{i=n_0}^{n} f(i) \asymp \int_{n_0}^{n} f(x)\, dx$.

Примери:

1) $f(x) = x^2$

Нека $n_0 = 1$, $m = 1$, $M = 4$.

За тези n_0, m и M е в сила, че $\forall\, n \geq n_0 : (f(n) > 0\ \&\ m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n))$,

или записано експлиситно: $\forall\, n \geq 1 : \left(n^2 > 0\ \&\ 1.\, n^2 \leq n^2 \leq (n+1)^2 \leq 4.\, n^2\right)$.

Тоест можем да приложим интегралния критерий и получаваме $\sum_{i=1}^{n} i^2 \asymp \int_{1}^{n} x^2\, dx = \theta\left(n^3\right)$.

2) $f(x) = x^\alpha$

Нека $n_0 = 1$.

- $\alpha \geq 0$

Нека $m = 1$, $M = 2^\alpha$.

За тези n_0, m и M е в сила, че $\forall\, n \geq n_0 : (f(n) > 0\ \&\ m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n))$,

или записано експлиситно:

$\forall\, n \geq 1 : (n^\alpha > 0\ \&\ 1.\, n^\alpha \leq (n+1)^\alpha \leq 2^\alpha\, n^\alpha)$.

Тоест можем да приложим интегралния критерий и получаваме $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha \asymp \int_{1}^{n} x^\alpha\, dx = \theta\left(n^{\alpha+1}\right)$.

- $\alpha < 0$

Нека $m = 2^{-\alpha}$, $M = 1$.

За тези n_0, m и M е в сила, че $\forall\, n \geq n_0 : (f(n) > 0\ \&\ m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n))$,

или записано експлиситно:

$\forall\, n \geq 1 : (n^\alpha > 0\ \&\ 2^{-\alpha}.n^\alpha \leq (n+1)^\alpha \leq n^\alpha \leq 1.\, n^\alpha)$.

Тоест можем да приложим интегралния критерий и получаваме $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha \asymp \int_{1}^{n} x^\alpha\, dx = \begin{cases} \theta\left(n^{\alpha+1}\right) & , \alpha > -1 \\ \theta(ln(n)) & , \alpha = -1 \\ \theta(1) & , \alpha < -1 \end{cases}$.

Тоест в общия случай имаме: $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha = \begin{cases} \theta\left(n^{\alpha+1}\right) & , \alpha > -1 \\ \theta(ln(n)) & , \alpha = -1 \\ \theta(1) & , \alpha < -1 \end{cases}$.

3) $f(x) = a^x,\ a > 0$
Нека $n_0 = 1$.
$\cdot a > 1$
Нека $m = 1,\ M = \alpha$.
За тези n_0, m и M е в сила, че $\forall\, n \geq n_0 : (f(n) > 0\ \&\ m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n))$,
или записано експлиситно:
$\forall\, n \geq 1 : \left(\alpha^n > 0\ \&\ 1.\ \alpha^n \leq a^n \leq a^{n+1} \leq \alpha.\alpha^n\right)$.
Тоест можем да приложим интегралния критерий и получаваме $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \asymp \int_1^n \alpha^x\, dx = \frac{a^n - a^1}{ln(a)} = \theta(a^n)$ // $\alpha \geq 1$
$\cdot a = 1$
Нека $m = 1,\ M = \alpha$.
За тези n_0, m и M е в сила, че $\forall\, n \geq n_0 : (f(n) > 0\ \&\ m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n))$,
или записано експлиситно:
$\forall\, n \geq 1 : \left(\alpha^n > 0\ \&\ 1.\ \alpha^n \leq \alpha^n \leq \alpha^{n+1} \leq \alpha.\alpha^n\right)$.
Тоест можем да приложим интегралния критерий и получаваме $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \asymp \int_1^n \alpha^x\, dx = \int_1^n 1\, dx = n - 1 = \theta(n)$.
$\cdot 0 < a < 1$
Нека $m = \alpha,\ M = 1$.
За тези n_0, m и M е в сила, че $\forall\, n \geq n_0 : (f(n) > 0\ \&\ m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n))$,
или записано експлиситно:
$\forall\, n \geq 1 : \left(\alpha^n > 0\ \&\ \alpha.\alpha^n \leq a^{n+1} \leq a^n \leq 1.\ \alpha^n\right)$.
Тоест можем да приложим интегралния критерий и получаваме
$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \asymp \int_1^n \alpha^x\, dx = -\frac{a^n - a^1}{ln(a)} = \theta(1)$ // $0 < \alpha < 1$

Тоест в общия случай имаме: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i = \begin{cases} \theta(\alpha^n) & , \alpha > 1 \\ \theta(n) & , \alpha = 1 \\ \theta(1) & , 0 < \alpha < 1 \\ \textit{не ни интересува} & , \text{else} \end{cases}$

4) $f(x) = x^x$
Нека $n_0 = 1,\ m = 1$. Може да забележим обаче, че $\nexists\, M > 0\ \forall\, n \geq n_0 : \max_{x\in[n,n+1]} x^x = (n+1)^{n+1} < M.n^n$.
Тоест тук не можем да приложим интегралния критерий.

5) $f(x) = x\,!$ // gamma function
Нека $n_0 = 1,\ m = 1$. Може да забележим обаче, че $\nexists\, M > 0\ \forall\, n \geq n_0 : \max_{x\in[n,n+1]} x\,! = (n+1)\,! < M.n^n$.
Тоест тук не можем да приложим интегралния критерий.

Важно!
Погледнете файла *Интегрален критерий.pdf*, който е прикачен към материалите в мудъл. Там има доказателство и по-важното - още някои много хубави примери!

Зад. 1

```
func(n) : // n ∈ ℕ+
    for i ← 1 to n
        print 'a'
```

Сложността е $\sum_{i=1}^{n} c \leq c_{\max} \sum_{i=1}^{n} 1 = c_{\max}.n = \theta(n),\ \ c_{\max} = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{c_i\}$.

Зад. 2

```
func(n) : // n ∈ ℕ+
    for i ← 1 to n
        for j ← 1 to n
            print 'a'
```

Сложността е $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta(1) = \sum_{i=1}^{n} \theta(n) = \theta(n). \sum_{i=1}^{n} \theta(1) = \theta(n).\theta(n) = \theta\left(n^2\right)$.

Заб.

За следващите задачи няма да пишем експлиситно θ. От контекста се разбира, че става въпрос за асимптотично равенство.

Зад. 3

```
func(n) : // n ∈ ℕ+
    for i ← 1 to n
        for j ← 1 to i
            print 'a'
```

Сложността е $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \theta\left(n^2\right)$.

Зад. 4

```
func(n) : // n ∈ ℕ+
    for i ← 1 to n
        for j ← 1 to n with step i
            print 'a'
```

Сложността е $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j+=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n.ln(n) = \theta(n.\log(n))$.

Зад. 5

```
func(n) : // n ∈ ℕ+
for i ← 1 to n
    for j ← i to 2^i
        if j < n then
            for k ← 1 to n with step i
                print 'a'
        print 'b'
```

Сложността е $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{2^i} 1}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \sum_{k=1,\, k+=i}^{n} 1}_{(2)} + \underbrace{\sum_{i=\log(n)+1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1,\, k+=i}^{n} 1}_{(3)} = (*)$

$$(1) = \sum_{i=1}^{n} \left(2^i - i + 1\right) = \sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = \theta(2^n) - \theta\left(n^2\right) + \theta(n) = \theta(2^n)$$

$$(2) = \sum_{i=1}^{\log(n)} \sum_{j=i}^{2^i} \frac{n}{i} =$$

$$n.\sum_{i=1}^{\log(n)} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=i}^{2^i} 1\right) = n.\sum_{i=1}^{\log(n)} \left(\frac{1}{i} \left(2^i - i + 1\right)\right) = n.\left(\sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{2^i}{i} - \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{i}{i} + \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{1}{i}\right) \leq n.\left(\sum_{i=1}^{\log(n)} 2^i - \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{i}{i} + \sum_{i=1}^{\log(n)} \frac{1}{i}\right) =$$

$$n.\left(\theta\left(2^{\log(n)}\right) - \theta(\log(n)) + \theta\left(\log^{(2)}(n)\right)\right) = \theta\left(n^2\right)$$

$$\Rightarrow (2) = O\left(n^2\right)$$

$$(3) = \sum_{i=\log(n)+1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{n}{i} =$$

$$n.\sum_{i=\log(n)+1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=i}^{n} 1 = n.\sum_{i=\log(n)+1}^{n} \frac{1}{i} (n - j + 1) \leq n.\sum_{i=\log(n)+1}^{n} \frac{n}{i} = n^2.\sum_{i=\log(n)+1}^{n} \frac{1}{i} \leq n^2.\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n^2.\log(n)$$

$$\Rightarrow (3) = O\left(n^2.\log(n)\right)$$

$$(*) = \theta(2^n) + O\left(n^2\right) + O\left(n^2.\log(n)\right) = \theta(2^n)$$

Зад. 6

```
1. Alg6 (A[1 .. n]) : // n ∈ ℕ0, A ∈ ℝ^n
2.      for i ← 1 to n − 1
3.           for j ← i + 1 to n
4.                if A[i] = A[j] then
5.                     return TRUE
6.      return FALSE
```

Какво връща следния алгоритъм? Да се докаже чрез инварианти (2 на брой).

Когато имаме вложени цикли, то трябва да имаме по 1 инвариант за всеки цикъл - един инвариант за външния и един за вътрешния. По-важния (в смисъл за контролно/домашно) е **външния**. Той е този, който трябва да е описан максимално подробно при ограничено време!

Вътрешен инваринт: При всяко k-то достигане на ред 3 имаме, че елементите $A[i+1], \ldots, A[i+k-1]$ са различни от $A[i]$.

Външен инвариант: При всяко k-то достигане на ред 2 имаме, че елементите $A[1], \ldots, A[k-1]$ са уникални спрямо $A[1 .. n]$.