Зад. 1 //Използвайте: доказателство чрез индукция

$T(n) = 2\,T(n-1) + T(\log(n)) + n$

Заподозряваме, че асимптотиката е $T(n) = \theta(2^n)$. Сега ще го докажем:

Нека $n_{\text{st}} \in \mathbb{N}_0$ е достатъчно голямо число.

a) $T(n) = O(2^n)$

Нека $b = \max\left\{\frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{2^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}, ?\right\}$.

Ще докажем, че $\exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : T(n) \leq b2^n$.

База:

Нека $k \in \{1, \ldots, n_{\text{st}}-1\}$. Ще докажем, че $T(k) \leq b2^k$.

От деф. на $b = \max\left\{\frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{2^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}, ?\right\} \overset{1\leq k\leq n_{\text{st}}-1}{\Rightarrow} T(k) \leq b2^k$, което искахме да докажем.

ИП:

Нека допуснем, че е изпълнено $\forall\, m < n : T(m) \leq b2^m$.

ИС:

Ще докажем, че е изпълнено за n, т.е $T(n) \leq b2^n$.

$T(n) \overset{\text{def}}{=} 2\,T(n-1) + T(\log(n)) + n \overset{\text{ИП}}{\leq} 2\,b2^{n-1} + b2^{\log(n)} + n = b2^n + bn + n \overset{?}{\leq} b2^n$

$bn + n \overset{?}{\leq} 0$

Очевидно $\forall\, b > 0\ \nexists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0 : bn + n \leq 0$

...не стана. Сега ще засилим индукционната хипотеза.

a .2) $T(n) = O(2^n - \alpha^n)$, $\alpha \in (1, 2)$

Нека $b_1 = \max\left\{2\,\frac{T(1)}{2^1}, 2\,\frac{T(2)}{2^2}, 2\,\frac{T(3)}{2^3}, \ldots, 2\,\frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}, ?\right\}$.

Нека $b_2 = \min\left\{\frac{T(1)}{\alpha^1}, \frac{T(2)}{\alpha^2}, \frac{T(3)}{\alpha^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{\alpha^{n_{\text{st}}-1}}, ?\right\}$.

Ще докажем, че $\exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : T(n) \leq b_1\,2^n - b_2\,\alpha^n$.

База:

Нека $k \in \{1, \ldots, n_{\text{st}}-1\}$. Ще докажем, че $T(k) \leq b_1\,2^k - b_2\,\alpha^k$.

От деф. на $b_1 = \max\left\{2\,\frac{T(1)}{2^1}, 2\,\frac{T(2)}{2^2}, 2\,\frac{T(3)}{2^3}, \ldots, 2\,\frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}, ?\right\} \overset{1\leq k\leq n_{\text{st}}-1}{\Rightarrow} 2\,T(k) \leq b_1\,2^k$.

От деф. на $b_2 = \min\left\{\frac{T(1)}{\alpha^1}, \frac{T(2)}{\alpha^2}, \frac{T(3)}{\alpha^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{\alpha^{n_{\text{st}}-1}}, ?\right\} \overset{1\leq k\leq n_{\text{st}}-1}{\Rightarrow} T(k) \geq b_2\,\alpha^k \Rightarrow -T(k) \leq -b_2\,\alpha^k$.

$\Rightarrow 2\,T(k) - T(k) = T(k) \leq b_1\,2^k - b_2\,\alpha^k$, което искахме да докажем.

ИП:

Нека допуснем, че е изпълнено $\forall\, m < n : T(m) \leq b_1\,2^m - b_2\,\alpha^m$.

ИС:

Ще докажем, че е изпълнено за n, т.е $T(n) \leq b_1\,2^n - b_2\,\alpha^n$.

$T(n) \overset{\text{def}}{=} 2\,T(n-1) + T(\log(n)) + n \overset{\text{def}}{\leq} 2\left(b_1\,2^{n-1} - b_2\,\alpha^{n-1}\right) + \left(b_1\,2^{\log(n)} - b_2\,\alpha^{\log(n)}\right) + n \overset{?}{\leq} b_1\,2^n - b_2\,\alpha^n$

$-2\,b_2\,\alpha^{n-1} + nb_1 - n^{\log(\alpha)}\,b_2 + n \overset{?}{\leq} -b_2\,\alpha^n$

$b_2\,\alpha^{n-1}(\alpha-2) + n(b_1+1) - n^{\log(\alpha)} \overset{?}{\leq} 0$

Ясно е, че горното за какви да е b_1, $b_2 > 0$ при достатъчно големи n, асимптотиката ще се определя от събираемото $b_2\,\alpha^{n-1}(\alpha-2)$. Също така знаем, че $\alpha \in (1, 2) \Rightarrow \alpha - 2 < 0 \Rightarrow b_2\,\alpha^{n-1}(\alpha-2) < 0 \leq 0$.

Очевидно $\forall\, b_1, b_2 > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : b_2\,\alpha^{n-1}(\alpha-2) + n(b_1+1) - n^{\log(\alpha)} \leq 0$.

Наблюдение (въшкав детайл за любознателните) Нека $n_{\text{st}} = 10$ (произволно число за илюстрация). При това n_{st} имаме минимизация/максимизация на множества от по $9-10$ елемента (в зависимост дали броим '?'). Оправили сме базата за $9-10$

елемента. Изкарали сме някакви конкретни $b_1, b_2 > 0$. Сега за тези конкретни $b_1, b_2 > 0$ може да се окаже, че това $n_0 : \forall\, n \geq n_0 : b_2\, \alpha^{n-1}(\alpha - 2) + n(b_1 + 1) - n^{\log(\alpha)} \leq 0$ е твърде голямо, тоест е строго по-голямо от $n_{\text{st}} - 1$. В такъв случай излиза, че отново правим индукция без база. Затова след като намерим това n_0, имаме 2 възможности:

1. $n_0 \leq n_{\text{st}} - 1$

Тук всичко е ок - индукцията работи.

2. $n_0 > n_{\text{st}} - 1$

В такъв случай n_{st} не е "достатъчно голямо" (..затова се разбираме да е "достатъчно голямо"). Нека вземем по-голямо n_{st} и по-конкретно $n_{\text{st}} = n_0 + 1$. И си обновим b_1, b_2 - вече ще са минимум/максимум на повече елементи (надмножество). Потенциално b_1 ще нарастне, а b_2 ще намалее. Но в такъв случай, може да излезе, че новото n_0 (за новите b_1, b_2) $: \forall\, n \geq n_0 : b_2\, \alpha^{n-1}(\alpha - 2) + n(b_1 + 1) - n^{\log(\alpha)} \leq 0$ е твърде голямо, тоест строго по-голямо от $\underbrace{n_{\text{st}}}_{\text{новото } n_{\text{st}}} - 1$... може да видите накъде отиват нещата.. пак ново n_{st}, пак може да не е достатъчно голямо, пак ще го актуализираме, но пак може да не е достатъчно голямо и т.н... Как да сме сигурни, че няма да въртим безкраен цикъл от този сорт?

Нека да видим порядъка на $b_{1,n}$ и $b_{2,n}$, където $b_{1,i} = 2\, \frac{T(i)}{2^i}$, $b_{2,i} = \frac{T(i)}{\alpha^i}$.

Тъй като $T(n) = \theta(2^n)$, то $b_{1,i} = 2\, \frac{\theta(2^i)}{2^i} = \theta(1)$, $b_{2,i} = 2\, \frac{\theta(2^i)}{\alpha^i} = \theta((\underbrace{\tfrac{2}{\alpha}}_{\in(1,2)})^i)$.

Тоест забелязваме, че от един момент натъка $b_{1,i}$ е константа (грубо казано), а $b_{2,i}$ винаги нараства (отново от един момент нататъка). Тоест знаем, че b_1 ще спре да нараства, а b_2 ще спре да намалява (с още ненужно вършкави подробности защо при b_1 би сработило). Поради тази причина, няма как горния проблем да настъпи - няма да зациклим до безкрай, тоест има "достатъчно голямо" n_{st}.

Това наблюдение ще го ползваме наготово в курса.

Тъй като n_{st} е достатъчно голямо, то за $b_1 = \max\{2\, \frac{T(1)}{2^1}, 2\, \frac{T(2)}{2^2}, 2\, \frac{T(3)}{2^3}, \ldots, 2\, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}\}$ и $b_2 = \min\{\frac{T(1)}{\alpha^1}, \frac{T(2)}{\alpha^2}, \frac{T(3)}{\alpha^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{\alpha^{n_{\text{st}}-1}}\}$ $\exists\, n_0 \leq n_{\text{st}} - 1\ \forall\, n \geq n_0 : T(n) \leq b_1\, 2^n - b_2\, \alpha^n$.

$\Rightarrow T(n) = O(2^n - \alpha^n) = O(2^n)$, $\alpha \in (1, 2)$.

***b*) $T(n) = \Omega(2^n)$**

За разлика от O-посоката, Ω-посоката е по-приятна. Тя не изисква засилване на инд. хипотеза.

Нека $b = \min\{\frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{2^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}, ?\}$.

Ще докажем, че $\exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : T(n) \geq b 2^n$.

База:

Нека $k \in \{1, \ldots, n_{\text{st}} - 1\}$. Ще докажем, че $T(k) \geq b 2^k$.

От деф. на $b = \min\{\frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{2^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}, ?\} \overset{1 \leq k \leq n_{\text{st}}-1}{\Rightarrow} T(k) \geq b 2^k$, което искахме да докажем.

ИП:

Нека допуснем, че е изпълнено $\forall\, m < n : T(m) \geq b 2^m$.

ИС:

Ще докажем, че е изпълнено за n, т.е $T(n) \geq b 2^n$.

$T(n) \overset{\text{def}}{=} 2\, T(n-1) + T(\log(n)) + n \overset{\text{ИП}}{\geq} 2\left(b 2^{n-1}\right) + b 2^{\log(n)} + n \overset{?}{\geq} b 2^n$

$(b + 1)\, n \overset{?}{\geq} 0$

Очевидно е изпълнено за кое да е $b > 0$. Оттук $b = \min\{\frac{T(1)}{2^1}, \frac{T(2)}{2^2}, \frac{T(3)}{2^3}, \ldots, \frac{T(n_{\text{st}}-1)}{2^{n_{\text{st}}-1}}\}$ ни върши работа и $n_0 = 1$ ни върши работа $\Rightarrow T(n) = \Omega(2^n)$.

$T(n) = O(2^n)\ \&\ T(n) = \Omega(2^n) \Rightarrow T(n) = \theta(2^n)$.

Забележка За разлика от предния път, може да забележим, че в нито един от трите случая

$b_1 = \max\{\ldots, ?\}$, $b_2 = \min\{\ldots ?\}$, $b = \min\{\ldots, ?\}$ не се наложи да добавим бонус стойност на мястото на '?'. Както отбелязахме по време на час - не е задължително, а само потенциално да излезе нова стойност.

Th (Master)

Нека $a \geq 1,\ b > 1$ и $f(n)$ - положителна. Тогава за $T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ имаме:

1. Ако $\exists\, \epsilon > 0 : f(n) = O\left(n^{\log_b(a) - \epsilon}\right)$, то $T(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$.

2. Ако $f(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, то $T(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log(n)\right)$.

3. Ако $\left(\exists\, \epsilon > 0 : f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a) + \epsilon}\right)\right)$ & $(\underbrace{\exists\, c \in (0,\ 1)\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\, \forall\, n \geq n_0 : a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)}_{\text{условие за регулярност}})$, то $T(n) = \theta(f(n))$.

Зад. 2

$T(n) = 4\, T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 4,\ b = 2,\ f(n) = n$

$\log_b(a) = 2$

Нека $\epsilon = 0.1$. Тогава $f(n) = n = O\left(n^{\log_b(a) - \epsilon}\right) = O\left(n^{1.9}\right)$

От MT1 $\Rightarrow\ T(n) = \theta\left(n^2\right)$

Зад. 3

$T(n) = 4\, T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3$

$a = 4,\ b = 2^{1/2},\ f(n) = n^3$

$\log_b(a) = \log_{2^{1/2}}(4) = \frac{1}{1/2} \log_2(4) = 2.2 = 4$

Нека $\epsilon = 0.1$. Тогава $f(n) = n^3 = O\left(n^{\log_b(a) - \epsilon}\right) = O\left(n^{3.9}\right)$

От MT1 $\Rightarrow\ T(n) = \theta\left(n^4\right)$

Зад. 4

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

$a = 1,\ b = 2,\ f(n) = 1$

$\log_b(a) = 0$

$f(n) = n^0 = \theta\left(n^{\log_b(a)}\right) = \theta\left(n^0\right)$

От MT2 $\Rightarrow\ T(n) = \theta\left(n^0 \log(n)\right) = \theta(\log(n))$

Зад. 5

$T(n) = 2\, T\left(\frac{n}{8}\right) + n$

$a = 2,\ b = 8,\ f(n) = n$

$\log_b(a) = \log_{2^3}(2) = \frac{1}{3}\log_2(2) = \frac{1}{3}$

Нека $\epsilon = \frac{1}{6}$. Тогава $f(n) = n = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right) = \Omega\left(n^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right) = \Omega\left(\sqrt{n}\right)$

Търсим $c,\ n_0 : \forall\ n \geq n_0 :\ a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$

$\frac{a}{b}\, n \leq cn$

$\Rightarrow c = \frac{1}{4}$ & $n_0 = 1$ ни вършат работа

От МТ3 $\Rightarrow\ T(n) = n$

Зад. 6

$T(n) = 4\, T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \sqrt{n}$

$a = 4,\ b = 2,\ f(n) = n^{5/2}$

$\log_b(a) = 2$

Нека $\epsilon = 0.1$. Тогава $f(n) = n^{2.5} = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right) = \Omega\left(n^{2.1}\right)$

Търсим $c,\ n_0 : \forall\ n \geq n_0 : a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$

$\frac{a}{b^{2.5}}\, n^{2.5} \leq c n^{2.5}$

$\frac{4}{4\sqrt{2}}\, n^{2.5} \leq c n^{2.5}$

$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $n_0 = 1$ ни вършат работа

От МТ3 $\Rightarrow\ T(n) = \theta\left(n^2 \sqrt{n}\right)$

Th (Extended master)

Нека $a \geq 1,\ b > 1$ и $f(n)$ - положителна. Тогава за $T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ имаме:

1. Ако $\exists\, \epsilon > 0 : f(n) = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right)$, то $T(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$.

2. Ако $f(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log^k(n)\right)$ & $k \in \mathbb{R}$ &

2.1. $k > -1$, то $T(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log^{k+1}(n)\right)$

2.2. $k = -1$, то $T(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log(\log(n))\right)$

2.3. $k < -1$, то $T(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$

3. Ако $\left(\exists\, \epsilon > 0 : f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right)\right)$ & $(\underbrace{\exists\, c \in (0,\ 1)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, n \geq n_0 : a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)}_{\text{условие за регулярност}})$, то $T(n) = \theta(f(n))$.

Зад. 7

$T(n) = 2\, T\left(\frac{n}{4}\right) + 2\sqrt{n}\, \log^3(n)$

$a = 2,\ b = 4,\ f(n) = 2\sqrt{n}\, \log^3(n)$

$\log_b(a) = \frac{1}{2}$

$f(n) = 2\sqrt{n}\, \log^3(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log^3(n)\right)$

От МТ21 $\Rightarrow\ T(n) = \theta\left(\sqrt{n}\, \log^4(n)\right)$

Зад. 8

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{\log(n)}$

$a = 1,\ b = 2,\ f(n) = \log^{-1}(n)$

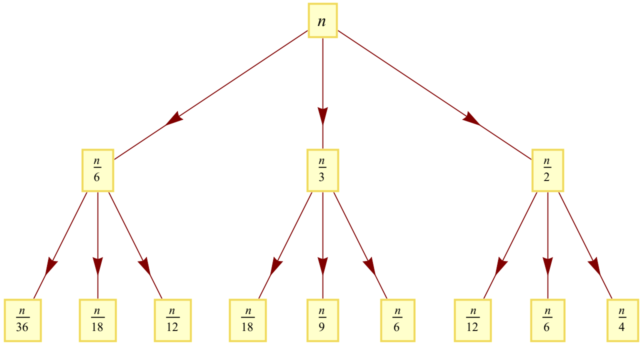
$\log_b(a) = 0$

$f(n) = n^0 \log^{-1}(n) = \theta\left(n^{\log_b(a)} \log^{-1}(n)\right)$

От MT22 $\Rightarrow\ T(n) = \theta\left(n^0 \log(\log(n))\right) = \theta(\log(\log(n)))$

Зад. 9 //Използвайте: дърво на рекурсия

$T(n) = T\left(\frac{n}{6}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n$



Може да забележим, че на всяко ниво сбора на нехомогенните части дава точно n. Също така е ясно, че дървото е пълно до $\lfloor \log_6(n) \rfloor$. Съответно дървото стига до височина най-много $\lfloor \log_2(n) \rfloor$. Тези твърдения могат да се докажат формално с индукция (само пълнотата би ни била от полза). Ясно е, че от факта, че дървото е пълно до височина $\lfloor \log_6(n) \rfloor$ и това, че сумата на нехомогенните части на всяко ниво дава точно n имаме долна граница за сложността на $T(n)$ и по-конкретно: $T(n) = \Omega(\lfloor \log_6(n) \rfloor\, n) = \Omega(n \log(n))$. Аналогично $T(n) = O(n \lfloor \log_2(n) \rfloor)$. Този метод е неформален. Изисква се формално доказателство. Едно такова би било с индукция:

Нека $n_{st} \in \mathbb{N}$ е достатъчно голямо число.

a) $T(n) = O(n\log(n))$

Нека $b = \max\left\{\frac{T(2)}{2\log(2)}, \frac{T(3)}{3\log(3)}, \ldots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)\log(n_{st}-1)}, ?\right\}$.

Ще докажем, че $\exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0 : T(n) \leq b n \log(n)$.

База:

Нека $k \in \{2, \ldots, n_{st} - 1\}$.

Тогава $b \geq \frac{T(k)}{k\log(k)}$, откъдето $T(k) \leq b k \log(k)$, което искахме да докажем.

ИП:

Нека е изпълнено $\forall\, m < n : T(m) \leq b m \log(m)$.

ИС:

Ще докажем, че е изпълено за n, т.е $T(n) \leq b n \log(n)$.

$T(n) \stackrel{\text{def}}{=} T\left(\frac{n}{6}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n \stackrel{\text{ИП}}{\leq} b\frac{n}{6}\log\left(\frac{n}{6}\right) + b\frac{n}{3}\log\left(\frac{n}{3}\right) + b\frac{n}{2}\log\left(\frac{n}{2}\right) + n \stackrel{?}{\leq} b n \log(n)$

$b\frac{n}{6}(\log(n) - \log(6)) + b\frac{n}{3}(\log(n) - \log(3)) + b\frac{n}{2}(\log(n) - \log(2)) + n \stackrel{?}{\leq} b n \log(n)$

$b n \log(n) - \left(\frac{b\log(6)}{6} + \frac{b\log(3)}{3} + \frac{b}{2}\right) n + n \stackrel{?}{\leq} b n \log(n)$

$n - \left(\frac{b\log(6)}{6} + \frac{b\log(3)}{3} + \frac{b}{2}\right) n \leq 0$

Очевидно за $b : \frac{b\log(6)}{6} + \frac{b\log(3)}{3} + \frac{b}{2} > 1$ горното е изпълнено. При $b = 3$ е изпълнено $\frac{b\log(6)}{6} + \frac{b\log(3)}{3} + \frac{b}{2} > 1$.

Тогава за $b = \max\left\{\frac{T(2)}{2\log(2)}, \frac{T(3)}{3\log(3)}, \ldots, \frac{T(n_{st}-1)}{(n_{st}-1)\log(n_{st}-1)}, 3\right\}$ и $n_0 = 1$ имаме $T(n) = O(n\log(n))$.

b) $T(n) = \Omega(n\log(n))$

за упражнение

$T(n) = \Omega(n\log(n))\ \&\ T(n) = O(n\log(n)) \Rightarrow T(n) = \theta(n\log(n))$.

Th (Akra − Bazzi)

Нека $T(n) = \begin{cases} \theta(1) & , 1 \le n \le c \\ a_1 T(b_1 n) + \ldots + a_k T(b_k n) & , n > c \end{cases}$, където:

1. $1 \le n \in \mathbb{R}$

2. $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \left(c \ge \frac{1}{b_i} \;\&\; c \ge \frac{1}{1-b_i}\right)$

3. $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : a_i > 0$

4. $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : b_i \in (0, 1)$

5. $k \in \mathbb{N}^+$

6. $g(n)$ е неотрицателна ф-я, удволетворяваща условието за полиномиално нарастване

7. p е уникално число: $\sum_{i=1}^{k} a_i (b_i)^p = 1$

Тогава: $T(n) \asymp n^p \left(1 + \int_1^n \frac{g(t)}{t^{p+1}} \, dt\right)$

Деф (полиномиално нарастване)

В контекста на горната формулировка на теоремата казваме, че $g(x)$ удволетворява условието за полиномиално нарастване, ако $\exists c_1, c_2 > 0 \; \forall x \ge 1 \; \forall i \in \{1, \ldots, k\} \; \forall t \in [b_i x, x] : c_1 g(x) \le g(t) \le c_2 g(x)$.

Зад. 10

$T(n) = \frac{1}{4} T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{3}{4} T\left(\frac{3n}{4}\right) + 1$

Директно проверяваме, че условия 1, 3, 4, 5 са верни.

При $c = 4$ е изпълнено условие 2: $\forall i \in \{1, \ldots, 2\} : \left(4 \ge \frac{1}{b_i} \;\& \quad 4 \ge \frac{1}{1-b_i}\right)$.

При $c_1 = c_2 = 1$ е изпълнено условие 6: $\forall x \ge 1 \; \forall i \in \{1, 2\} \; \forall t \in [b_i x, x] : 1.1 \le 1 \le 1.1$.

При $p = 0$ е изпълнено услове 7: $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$.

Тоест можем да приложим теоремата на Akra − Bazzi и получаваме: $T(n) = n^0 \left(1 + \int_1^n \frac{1}{t} \, dt\right) = \theta(\log(n))$.