

Задачи за масиви и сортировки

Зад. 1

Даден е масив $A[1 .. n] \in (\mathbb{N}_0)^n$ и много на брой заявки от вида:

$$\begin{cases} \text{Вход: } i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \text{Изход: } \sum_{k=i}^j A[k] \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{cases} \text{Дадено: } A[1 .. 7] = [4, 2, 5, 7, 1, 1, 10] \\ \text{Вход: } i = 2, j = 5 \\ \text{Изход: } 15 // 2 + 5 + 7 + 1 \\ \text{Вход: } i = 5, j = 2 \\ \text{Изход: } 0 \end{cases}$$

Предложете наредена двойка от бързи алгоритми (*индекс, заявка*), решаващи проблема. Индекса бива извикван точно веднъж. Заявката бива извиквана многократно. Заявка не може да бъде извиквана преди единственото извикване на индекса.

```
1. Index(A[1 .. n]) : // A ∈ (ℕ0)n
2.   Sum[1 .. n] ← Alloc(n)
3.   Sum[1] ← A[1]
4.   for i ← 1 to n
5.     Sum[i] ← Sum[i - 1] + A[i]
6.   return Sum[1..n]
```

```
1. Query(Sum[1 .. n], i, j) : // Sum ∈ (ℕ0)n, i ∈ ℕ0, j ∈ ℕ0
2.   if i < 1 or j > n then
3.     return -1
4.   if i > j then
5.     return 0
6.   if i = 1 then
7.     return Sum[j]
8.   return Sum[j] - Sum[i - 1]
```

Решението е със сложност $(\frac{\theta(n)}{\text{Index}}, \frac{\theta(1)}{\text{Query}})$.

Зад. 2

Даден е сортиран масив $A[1 .. n] \in \{0, 1, \dots, n\} : \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ е изп. $A[i] = A[j] \leftrightarrow i = j$. Търси се $k \in \{0, 1, \dots, n\} : k \notin A[1 .. n]$.

Пример:

$$\begin{cases} \text{Вход: } A[1 .. 7] = [0, 1, 2, 4, 5, 6, 7] \\ \text{Изход: } 3 \end{cases}$$

Предложете бърз алгоритъм решаващ проблема.

```

1.Task2(A[1 .. n]) : // A ∈ (ℕ₀)n
2.   left ← 1
3.   right ← n
4.   while left < right do
5.       mid ← ⌊(left + right)/2⌋
6.       if A[mid] + 1 = mid then
7.           left ← mid + 1
8.       else
9.           right ← mid
10.  if A[n] + 1 = n then
11.      return left
12.  return left - 1

```

Решението е със сложност $O(\log(n))$.

Зад. 3

Даден е масив $A[1 .. n] \in \mathbb{Z}^n : \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ е изп. $A[i] = A[j] \leftrightarrow i = j$. Търси се $\{(i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3 \mid i < j < k \ \& \ A[i] + A[j] + A[k] = 0\}$.

Пример:

{ Вход : $A[1 .. 7] = [-10, 1, 2, 3, 7, 8, 9]$
 { Изход : $\{(1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5)\}$

Предложете бърз алгоритъм решаващ проблема.

```

1.Task3(A[1 .. n]) : // A ∈ ℤn
2.   sort (A[1 .. n], order = ascending)
3.   Ans ← List.Init() // лист от наредени тройки
4.   for i ← 1 to n - 2
5.       if A[i] ≥ 0 then
6.           break
7.       j ← i + 1
8.       k ← n
9.       while j < k do
10.          if A[i] + A[j] + A[k] = 0 then
11.              Ans.PushBack(⟨A[i], A[j], A[k]⟩)
12.              j ← j + 1
13.              k ← k - 1
14.          else if A[i] + A[j] + A[k] < 0 then
15.              j ← j + 1
16.          else
17.              k ← k - 1
18.  return Ans

```

Решението е със сложност $\theta(n^2)$.

Зад. 4

Нека имаме функцията reverse : $\mathbb{R}^n \times \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}^n$ дефинирана по следния начин:

$$\text{reverse}(A[1..n], i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left[A[1], A[2], \dots, A[i-2], A[i-1], \underbrace{A[j], A[j-1], \dots, A[i+1], A[i]}_{\text{отзад напред спрямо входния } A[1..n]}, A[j+1], A[j+2], \dots, A[n] \right], & i < j \\ A[1..n] & \text{else} \end{cases}$$

Да се сортира масив $A[1..n] \in \mathbb{R}^n$, използвайки единствено функцията `reverse` с фиксиран 2-ри параметър $i = 1$.

Пример:

{ Вход : $A[1..3] = [1, 3, 2]$
 { Изход : $[1, 2, 3]$

Обяснение на примера:

$[1, 3, 2] \xrightarrow{\text{reverse}([1,3,2],1,2)}$ $[3, 1, 2] \xrightarrow{\text{reverse}([3,1,2],1,3)}$ $[2, 1, 3] \xrightarrow{\text{reverse}([2,1,3],1,2)}$ $[1, 2, 3]$

```
1.findIdxOfMax(A[1..n]) : // A ∈ ℝn
2.   maxIdx ← 1
3.   for i ← 2 to k
4.       if A[i] > A[maxIdx] then
5.           maxIdx ← i
6.   return maxIdx
```

```
1.Task4(A[1..n]) : // A ∈ ℝn
2.   for k ← n down to 2
3.       maxIdx ← findIdxOfMax(A[1..k])
4.       reverse(A[1..n], 1, maxIdx)
5.       reverse(A[1..n], 1, k)
6.   return A[1..n]
```

Решението е със сложност $\theta(n^2)$.

Зад. 5

Даден е булев масив $A[1..m][1..n] \in (\{0, 1\})^m$ със свойството: $\forall k \in \{1, \dots, n\} \forall i \in \{1, \dots, m-1\} : A[i+1][k] \leq A[i][k]$. Търси се $\max_{k \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^m A[i][k]$.

Пример:

{ Вход : $A[1..4][1..5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 { Изход : 3

Обяснение на примера:

Най-високата колонка от единици е с височина 3.

```
1.Task5(A[1..m][1..n]) : // A ∈ ({0, 1})m
2.   i ← 0
3.   for j ← 1 to n
4.       while i < m and A[i+1][j] = 1 do
5.           i ← i + 1
6.   return i
```

Решението е със сложност $\theta(m+n)$.

Зад. 6

Даден е масив $A[1..m][1..n] \in (\mathbb{N}_0)^m$ със свойството: $\forall i, j : (A[i][j] < A[i+1][j] \& A[i][j] < A[i][j+1])$ и число $k \in \mathbb{N}_0$. Да се провери ефикасно дали $k \in A$.

4 | Семинар 7.nb

Пример:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вход: } A[1..4][1..5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 12 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & 16 & 17 \\ 5 & 10 & 11 & 20 & 21 \\ 13 & 15 & 19 & 22 & 25 \end{pmatrix}, k = 15 \\ \text{Изход: TRUE} \end{array} \right.$$

```
1.Task6(A[1..m][1..n]) : //A ∈ ((ℕ₀)ⁿ)ᵐ
2.   i ← 1
3.   j ← n
4.   while i ≤ m and j ≥ 1 do
5.       if A[i][j] = k then
6.           return TRUE
7.       else if A[i][j] > k then
8.           j ← j - 1
9.       else
10.          i ← i + 1
11.  return FALSE
```

Решението е със сложност $O(m + n)$.