Задачи за упражнение

Зад. 1

Подредете по асимптотично нарастване следните функции:

$f_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ $\quad f_2(n) = n^{\log_3(37^n)}$ $\quad f_3(n) = \sqrt[\ln(n)]{n}$ $\quad f_4(n) = (\mathrm{n}e)!$

$f_5(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n}$ $\quad f_6(n) = (3n)^{2n}$ $\quad f_7(n) = \sqrt[3]{n^7 + 8\ln(n)}$ $\quad f_8(n) = \left(\sqrt{32}\right)^{\lg(n)}$

$f_9(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^n$ $\quad f_{10}(n) = \lg((n!)^n)$ $\quad f_{11}(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ $\quad f_{12}(n) = \sum_{i=1}^{n} i.\binom{n}{i}$

Необходими са точно 11 сравнения, всяко от които е един от тези видове:
a) на *непосредствени* съседи (които са *o*-малко една от друга и между тях няма друга)
b) на асимптотично ексивалентни функции

Зад. 2

Какво връща следния алгоритъм? Дайте формално доказателство чрез инвариант.

```
Alg2 (A[1 .. n]) : // n ∈ ℕ₀, A ∈ ℤⁿ
    b ← 0
    for i ← 1 to n
        if A[i] %5 = 0 then
            b ← b + 1
            if A[i] %3 = 0 then
                b ← b − 1
    return b
```

Зад. 3

Какво прави следния алгоритъм? Дайте формално доказателство чрез инвариант.

```
Alg3 (A[1 .. n]) : // n ∈ ℕ⁺, A ∈ ℝⁿ
    x ← ⌊n/2⌋ + 1
    y ← ⌊n/2⌋
    if n ≡ 1 (mod 2) then
        y ← y + 1
    while x ≤ n and y ≥ 1 do
        swap (A[x], A[y])
        x ← x + 1
        y ← y − 1
```

Зад. 4

Докажете, че $\forall\, n \in \mathbb{N}^{+} : p(1,\, n) = q(n,\, 3)$, където p и q са следните рекурсивни функции:

$p(n,\, m)$: // $n \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{Z}$
    if $m = 1$ then
        return n
    return $p(n + 1,\, m - 1) + n.m$

$q(n,\, m)$: // $n \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{Z}$
    if $m = 1$ then
        return n
    return $q(n + 1,\, m - 1).(n / m)$