Пояснение за задачите от вида “Подредете по асимптотично нарастване следните функции на една променлива”.

18 март 2021 г.

Дадени са k функции $f_1(n)$, ..., $f_k(n)$ и се иска да се подредят по асимптотично нарастване. Както знаем от лекции (това е Теорема 5 **Различните възможности при асимптотично сравняване на функции** в текущия вариант на лекционните записки), в общия случай има точно шест възможности за всеки две $f_i(n)$ и $f_j(n)$.

- Може да не са сравними. В задачи от вида “Подредете по асимптотично нарастване следните функции на една променлива” тази възможност **никога** няма да се явява. С други думи, в тези задачи всеки две функции са сравними.
- Може само $f_i(n) \preceq f_j(n)$ или само $f_i(n) \succeq f_j(n)$. В задачи от вида “Подредете по асимптотично нарастване следните функции на една променлива” тази възможност също **никога** няма да се явява.
- Може да са асимптотично еквивалентни. Тоест, да е вярно $f_i(n) \asymp f_j(n)$, което влече $f_i(n) \preceq f_j(n)$ и $f_i(n) \succeq f_j(n)$. Това може да се случи.
- Може $f_i(n) \prec f_j(n)$, което влече $f_i(n) \preceq f_j(n)$. Това може да се случи.
- Може $f_i(n) \succ f_j(n)$, което влече $f_i(n) \succeq f_j(n)$. Това е същото като предишното по транспонираната симетрия, така че също може да се случи.

Накратко, в тези задачи всеки две функции или са Тита една от друга, или едната е о-малко от другата. Само това.

Целта е да се установят класовете на еквивалентност—това са максималните по включване множества ф-ии, които са Тита една от друга—и после класовете да се подредят в линейна наредба с о-малко. Може да има класове от само една функция $f_i(n)$, в случай че тя не е Тита от никоя друга.

От комбинаторни съображения, k-елементното м-во от ф-иите има точно $\frac{k(k-1)}{2}$ 2-елементни подмножества. И така, ако се направят всички $\frac{k(k-1)}{2}$ сравнения на различни ф-ии, търсената наредба ще стане ясна. **Но това не е необходимо!** Това би бил груб подход, който при k от порядъка на десетки ще наложи стотици безсмислени сравнения.

За да бъде решението кратко и елегантно, да извършим само **необходимите** сравнения. А кои са необходими?

- За всеки две $f_i(n)$ и $f_j(n)$, всяка от които е сама в клас на еквивалентност, такива че $f_i(n) \prec f_j(n)$ и няма $f_t(n)$, такава че $f_i(n) \prec f_t(n) \prec f_j(n)$, сравнението на $f_i(n)$ с $f_j(n)$ е необходимо. Фактът, че $f_i(n) \prec f_j(n)$ не може да бъде установен индиректно.

  Забележете, че ако $f_i(n) \prec f_t(n) \prec f_j(n)$ и сме установили $f_i(n) \prec f_t(n)$ и $f_t(n) \prec f_j(n)$, не се налага да сравняваме $f_i(n)$ и $f_j(n)$, защото в такъв случай $f_i(n) \prec f_j(n)$ следва от транзитивността на $\prec$. Но при допускането, че никоя $f_t(n)$ не е между $f_i(n)$ и $f_j(n)$, няма как да използваме транзитивността.

  По формално казано—това е вид аргументация с противник—ако не сме сравнили $f_i(n)$ и $f_j(n)$ и дадем решение, според което $f_i(n) \prec f_j(n)$, противникът може да промени $f_j(n)$ по такъв начин, че да стане $f_j(n) \prec f_i(n)$, без да засегне относителния порядък на никоя друга двойка функции. Тогава вече няма да е вярно, че $f_i(n) \prec f_j(n)$, и нашето решение ще е грешно.

- Ако $f_i(n) \asymp f_j(n)$, сравнението между тях не е задължително, ако класът им на еквивалентност съдържа и други ф-ии. Това, което е задължително, е да бъдат извършени $t-1$ смислени сравнения на ф-ии от този клас, където t е броят на ф-иите в него. Множество от сравнения е смислено за класа, ако от него (от тези сравнения) можем да заключим, че класът е именно този.

  Най-естественото решение е, само по отношение на този клас на еквивалентност, във всяко сравнение след първото да участва една ф-я, която не сме разглеждали досега, и една ф-я, която вече сме разглеждали и установили, че е в този клас.

  По отношение на един клас на еквивалентност, допустимо е да се покаже, че има функция (която не е измежду тези от класа), такава че всяка от функциите от класа е Тита от нея. От това следва автомотично, че всички тези ф-ии са Тита една от друга.

Накратко, откриваме класовете на еквивалентност по най-икономичния начин и после за всеки клас на еквивалентност след първия (първият са най-бавно растящите ф-ии, Тита една от друга) вземаме кой да е представител и го сравняваме с кой да е представител на предния клас.

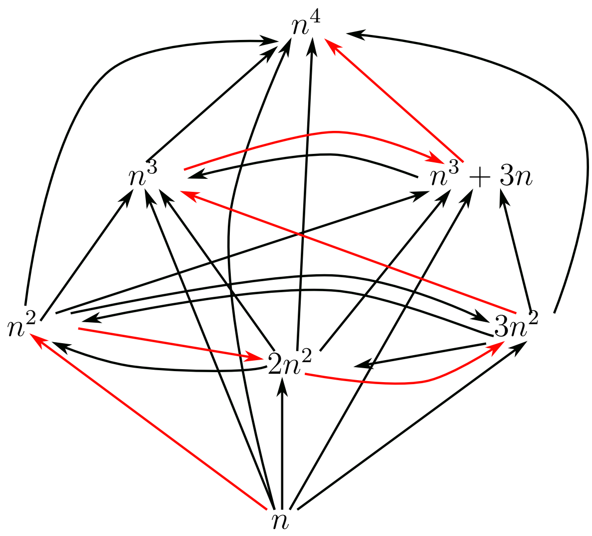
Лесно се вижда, че при k ф-ии, икономичното решение съдържа точно $k-1$ сравнения, от които можем да заключим каква е наредбата. Това е сила независимо от това дали има ф-ии, които са Тита една от друга, или не.

При оценяването на този вид задачи се оценяват само коректни сравнения, за каквито стана дума – сравнения без излишък вътре в клас на еквивалентност или на два представителя на съседни класове, чиито

представители не са били сравнявани досега. Всички други сравнения се считат за излишни и се игнорират при проверяването.

Ето пример. Нека ф-иите са n, n^2, $2n^2$, $3n^2$, n^3, n^3+3n и n^4. Излишни сравнения, примерно, n с n^3, n с n^4, n^2 с n^4, $2n^2$ с n^4 и така нататък. Дори да е коректно извършено, такова сравнение се оценява с нула точки, защото резултатът от него може да се изведе от други сравнения, които са смислени. Също така е излишно да се сравняват n^2 и $3n^2$, ако вече са сравнени n^2 с $2n^2$ и $2n^2$ с $3n^2$. Тъй като ф-иите са седем на брой, минимално решение с шест сравнения е n с n^2, n^2 с $2n^2$, $2n^2$ с $3n^2$, $3n^2$ с n^3, n^3 с n^3+3n и n^3 с n^4. От тях можем да заключим, че $n \prec n^2 \asymp 2n^2 \asymp 3n^2 \prec n^3 \asymp n^3+3n \prec n^4$.

В някакъв смисъл, икономичното решение е нещо като намиране на ориентиран прост път в графа на пълната преднаредба, който път съдържа всички k функции и оттам има $k-1$ ребра. Ето графът на пълната преднаредба от примера и въпросният път в него (в червено), който отговаря на решението $n \prec n^2 \asymp 2n^2 \asymp 3n^2 \prec n^3 \asymp n^3+3n \prec n^4$.



Преднаредбата, за която стана дума, е $\preceq$. Забележете обаче, че не описваме решението чрез преднаредбата. С други думи, това

$$n \preceq n^2 \preceq 2n^2 \preceq 3n^2 \preceq n^3 \preceq n^3+3n \preceq n^4$$

не е достатъчно информативно и **не се признава за решение**, макар че е вярно. Решението трябва да бъде изразено чрез $\prec$ и $\asymp$.