Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2021/2022 уч. г. в СУ, ФМИ

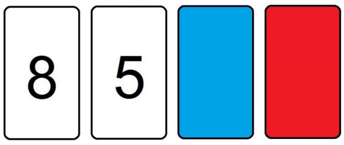
Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*30*	*30*	*30*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Всяка от четири карти за игра има число на лицевата си страна и цвят на гърба. Две от картите са поставени на масата с лицевата страна нагоре; виждат се числата 8 и 5. Другите две карти са с гърба нагоре; едната е синя, другата е червена.



Искаме да проверим дали е вярно твърдението: "Всяка карта с четно число има червен гръб." Колко най-малко карти трябва да обърнем и кои са те?

Най-малкият брой карти е донякъде въпрос на късмет: може още първата обърната карта да опровергае твърдението. Разглеждаме най-лошия случай — когато твърдението е вярно; тогава трябва да обърнем най-много карти. Разбира се, можем да обърнем всичките четири карти, но това е излишно: някои карти не е нужно да обръщаме. В задачата се пита колко най-малко и точно кои карти трябва да обърнем в най-лошия случай — когато твърдението е истина (ала ние не знаем това отнапред).

Задачи от този вид се наричат минимаксни, защото в тях се търси минимум на максимум. В тази задача максимумът зависи от случая: коя карта потвърждава съждението и коя — не; а минимумът зависи от нашия избор: кои карти ще обърнем и кои ще пренебрегнем.

Предложете не само отговор, но и подробен анализ: за всяка от четирите карти се обосновете защо трябва или не трябва да бъде обърната.

Задача 2. Дайте пример за бинарна релация $R \subseteq A \times A$, дефинирана над подходящо избрано крайно непразно множество A, която притежава всички изброени свойства:

1) $\forall x \in A : \forall y \in A : xRy \to \neg\, yRx$;
2) $\forall x \in A : \exists y \in A : xRy$;
3) $\forall x \in A : \forall y \in A : (xRy \to \exists z \in A : xRz \wedge zRy)$.

За избраната от Вас релация R докажете, че тя настина има трите свойства.

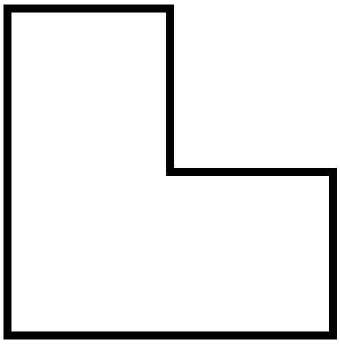
Задача 3. Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворява неравенствата

$$f(x+19) \leq f(x) + 19 \text{ и } f(x+94) \geq f(x) + 94 \text{ за всяко } x \in \mathbb{R}.$$

Докажете, че $f(x+1) = f(x) + 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Да се докаже, че за всяко цяло число $n \geq 2$ показаната фигура може да се разбие на n фигури, всеки две от които са подобни помежду си, но не непременно на дадената фигура. Фигурите, съответстващи на едно и също (произволно) n, трябва да бъдат подобни помежду си; обаче фигурите, съответстващи на различни n, не е задължително да бъдат подобни.

Дадената фигура се състои от три еднакви квадрата, долепени във формата на буквата Г.



Опишете решението отначало неформално, а след това съставете строго доказателство. Всички разсъждения да бъдат описани с думи и онагледени с чертежи. Словесното описание не замества чертежите, нито чертежите — словесното описание.

Упътване: Тази задача се решава трудно при неправилен подход. Не е лесно да се намери прост начин за разрязване, който работи еднакво добре при всички допустими стойности на n. По-добре направете следното.

Отначало разрежете дадената фигура на някакъв малък брой фигури, всеки две от които са подобни (вкл. еднакви) помежду си, но не непременно на дадената фигура. После разрежете една от новите фигури на части, които са подобни на нея (следователно и на останалите фигури). Така ще увеличите стойността на n. Тази стъпка може да се повтори неограничено много пъти. Следователно получавате безкрайна редица от стойности на n, за които твърдението е доказано. Напишете първите няколко члена на редицата; всеки от тях трябва да бъде придружен с чертеж на съответното разрязване. Подредете чертежите отляво надясно по нарастващи стойности на n, така че да личи как всяко разрязване се получава от предишното. Това ще бъде неформалното описание на решението.

Повторението на една и съща стъпка представлява завоалирана математическа индукция. Формалното описание на решението се състои в строгото изложение на тази индукция. Съставете формула за общия член на получената редица, за да можете да изкажете строго твърдението, че първоначалната фигура може да се разбие на n подобни фигури за всяко n от редицата. После съставете строго доказателство на твърдението по метода на математическата индукция. Базата на индукцията ще съответства на първия член на редицата, а индуктивната стъпка — на прехода от един член към следващия чрез разрязване на една от частите.

Получената безкрайна редица може би няма да съдържа всички допустими стойности на n. Ако е така, повторете описаните етапи, за да получите нова безкрайна редица. Продължете така, докато решите задачата за всички допустими стойности на n.

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Задача 1 носи 10 точки само ако е решена вярно и пълно. Грешен отговор носи 0 точки.

Задача 2 се оценява с 30 точки, разпределени по следния начин:
— за дефиниране на множеството A и релацията R: 15 точки;
— по 5 точки за всяко свойство, за което е доказано, че се притежава от R.
Дават се допълнителни 10 точки (извън предвидените 30) за намиране на безброй много релации.

Задача 3 и **задача 4** носят по 30 точки, чието разпределение е указано в решенията.