

Лекция 3: Релации

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

21 март 2022 г.

Определение 1

Нека $n \geq 1$ и A_1, A_2, \dots, A_n са множества, наречени съответно първи домейн, втори домейн, \dots , n -ти домейн. Релация над декартовото произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ се нарича всяко множество

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Казваме, че R е n -местна, или n -арна.

Ако $n = 2$, релацията е *двуместна*. Ако R е двуместна и първият и вторият домейн съвпадат, тоест $A_1 = A_2 = A$, казваме, че R е *релация над Декартовия квадрат* A^2 .

Ако кажем “ R е релация” без повече уточнения, подразбираме, че R е релация над някакъв Декартов квадрат.

$<$, \leq , $>$, \geq и $=$ са релации над Декартовия квадрат \mathbb{R}^2 .
Съгласно определението, всяка от тях е множество от наредени двойки от реални числа. Вярно е, че $(1, 2) \in <$, $(1, 2) \in \leq$, $(1, 1) \in \leq$, $(1, 1) \notin <$, и така нататък.

Нека S е множество. \subseteq_S е релация над $2^S \times 2^S$, дефинирана така:

$$\forall a, b \in 2^S : (a, b) \in \subseteq_S \stackrel{\text{def}}{\iff} a \subseteq b$$

Примерно, нека $S = \{a, b\}$. Вярно, че $(\{a\}, \{a, b\}) \in \subseteq_S$, $(\{a, b\}, \{a\}) \notin \subseteq_S$, и така нататък.

Инфиксен запис при релации

Това е в сила **само** за двуместни релации, независимо от това дали първият и вторият домейн съвпадат или не.

Нека $R \subseteq A_1 \times A_2$. Наместо да пишем “ $(x, y) \in R$ ”, където $x \in A_1$ и $y \in A_2$, пишем много по-прегледното “ $x R y$ ”. Това е *инфиксен запис*: символът на релацията се записва между елементите.

Това е записът, познат ни от училище. Примерно, “ $1 < 2$ ” вместо $(1, 2) \in <$, “ $2 \nless 1$ ” вместо “ $(2, 1) \notin <$ ”, и така нататък.

Примери за релации с по-голяма “местност”

Триместна релация е $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}$, дефинирана така:

$$(a, b, c) \in R \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} a \bmod b = c$$

е релацията на остатък при целочислено делене.

Инфиксният запис не е приложим.

За смисъла от теоретико-множествената дефиниция на “релация”

Релация означава отношение. Това не може да е дефиниция: а какво е отношение?

Не искаме да въвеждаме ново първично понятие, ако можем да го избегнем. Вече сме въвели “множество” като първично понятие. Всяко друго понятие изграждаме чрез “множество” и естествени езикови конструкции.

Формалната теоретико-множествена дефиниция е смислена: за да определим дадена релация, казваме кои n -орки елементи участват **като n -орки** в нея.

Представяния на релации с матрици

Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Нека $R \subseteq A^2$. Можем да представим R чрез булева матрица $n \times n$, в която клетката на ред i и колона j е

- 1, ако $a_i R a_j$,
- 0, в противен случай.

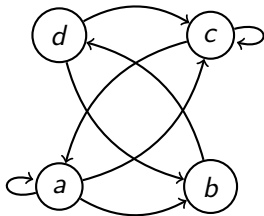
Например, нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)\}$. Тогава R се представя със следната матрица:

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	1	0

Представяния на релации с диаграми

Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Нека $R \subseteq A^2$. Можем да представим R чрез диаграма от точки и стрелки, в която на всяко a_i съответства отделна точка, наречена *върх*, а стрелка от върха, съответен на a_i до върха, съответен на a_j , се поставя тогава и само тогава, когато $a_i R a_j$.

Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)\}$. Тогава R се представя така:



Само за релациите от вида $R \subseteq A^2$ дефинираме следните шест свойства.

- рефлексивност
- антирефлексивност
- симетричност
- антисиметричност
- силна антисиметричност
- транзитивност

Нека A е крайно (недефинирано засега понятие!!).

Свойства на релациите

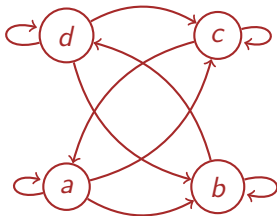
Рефлексивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е рефлексивна т.с.т.к. $\forall a \in A : aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само единици.

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	1	1

В представяне с диаграми, всеки връх има примка.



Свойства на релациите

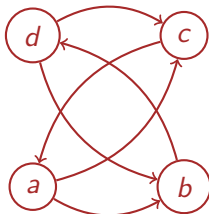
Антирефлексивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е антирефлексивна т.с.т.к. $\forall a \in A: \neg aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само нули.

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, нито един връх няма примка.



Свойства на релациите

Симетричност

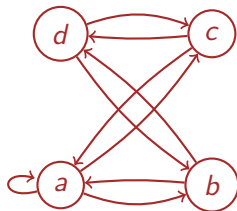
Нека $R \subseteq A^2$. R е симетрична т.с.т.к.

$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow bRa$.

В матрично представяне, матрицата е симетрична спрямо главния диагонал. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	1	0	0	1
c	1	0	0	1
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, или има и двете стрелки от единия до другия, или няма нито едната стрелка от единия до другия.



Свойства на релациите

Антисиметричност

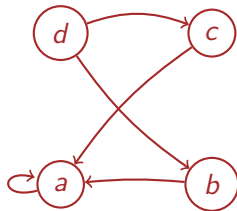
Нека $R \subseteq A^2$. R е антисиметрична т.с.т.к.

$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow \neg bRa$.

В матрично представяне, матрицата няма симетрична спрямо главния диагонал двойка единици. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	1	0	0	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, няма два различни върха, такива че има стрелка от първия до втория и от втория до първия.



Свойства на релациите

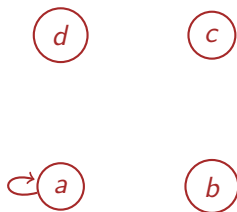
Антисиметричност (2)

Симетричността и антисиметричността не са взаимно изключващи се съгласно формалните дефиниции. Може релация $R \subseteq A^2$ да е симетрична и антисиметрична.

В матрично представяне, извън главния диагонал са само нули. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, и двете стрелки отсъстват. Примките са без значение.



Следните дефиниции са еквивалентни:

$$\forall a, b \in A : a \neq b \rightarrow (aRb \rightarrow \neg bRa)$$

$$\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$$

Дефинираме прости съждения p, q, r така: \boxed{aRb} е p , \boxed{bRa} е q , $\boxed{a = b}$ е r . Твърди се, че

$$\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

Наистина,

$$p \wedge q \rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r \equiv$$

$$\neg \neg r \vee \neg p \vee \neg q \equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$$

Свойства на релациите

Силна антисиметричност

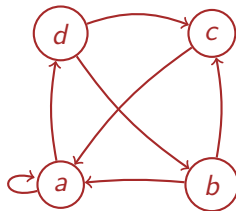
Нека $R \subseteq A^2$. R е силно антисиметрична т.с.т.к.

$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$.

В матрично представяне, всяка двойка клетки, симетрични спрямо главния диагонал, съдържа протиположни стойности. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	0	1	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, точно едната стрелка е налична. Примките са без значение.



Свойства на релациите

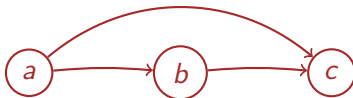
Транзитивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е транзитивна т.с.т.к.

$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Нищо не налага a , b и c да са различни!

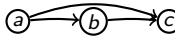
В матрично представяне транзитивността се описва трوماво, що се отнася до разчитане от човек.



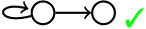
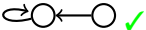
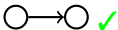
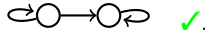
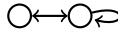
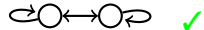
В представяне с диаграми, типичното описание на транзитивността е следното.



Свойства на релациите

Транзитивност (2)

Това описание на транзитивността  е смислено само при $a \neq b \neq c \neq a$ (неравенството не е транзитивно!).

- Ако $a = b = c$, дали този елемент има примка или няма е без значение за транзитивността:  ✓ или  ✓.
- Ако $a = b \neq c$:
 - ако поне едината стрелка от единия до другия липсва, тази двойка “не пречи” на транзитивността:  ✓,
 ✓,  ✓,  ✓.
 - ако и двете стрелки между тях са налице, ако поне единият няма примка, тази двойка “пречи” на транзитивността, иначе “не пречи”:  ✗,  ✓.

Затваряния на релации (closures)

Нека $R \subseteq A^2$. *Рефлексивното затваряне на R* е минималното множество $R' \subseteq A^2$, такова че $R' \supseteq R$ и R' е рефлексивна релация.

“ R' е минималното множество” означава, че за всяко $R'' \subseteq A^2$, такова че $R'' \supseteq R$ и R'' е рефлексивна, е вярно, че $R'' \supseteq R'$.

Симетричното затваряне на R и транзитивното затваряне на R се дефинират напълно аналогично: заменяме “рефлексивна” със “симетрична” и “транзитивна”.

Релация е рефлексивна т.с.т.к съвпада с рефлексивното си затваряне. Аналогично за симетричното и транзитивното затваряне.

Нека A е крайно и релациите са представени с матрици.

- Рефлексивното затваряне се получава с едно сканиране на главния диагонал и обръщане на всяка нула в единица.
- Симетричното затваряне се получава чрез сканиране за двойки $(0, 1)$ или $(1, 0)$, които са симетрични спрямо главния диагонал, и обръщане на нулата от двойката в единица.
- Транзитивното затваряне се получава по-сложно (нещо като умножение на матрицата със себе си $n - 1$ пъти).

Релация е *релация на еквивалентност* т.с.т.к. е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

От разгледаните досега релации над реалните числа само $=$ е релация на еквивалентност.

Ще разгледаме друга релация на еквивалентност. Нека S е множеството от всички булеви стрингове с дължина четири.

$$S = \{0000, 0001, \dots, 1110, 1111\}$$

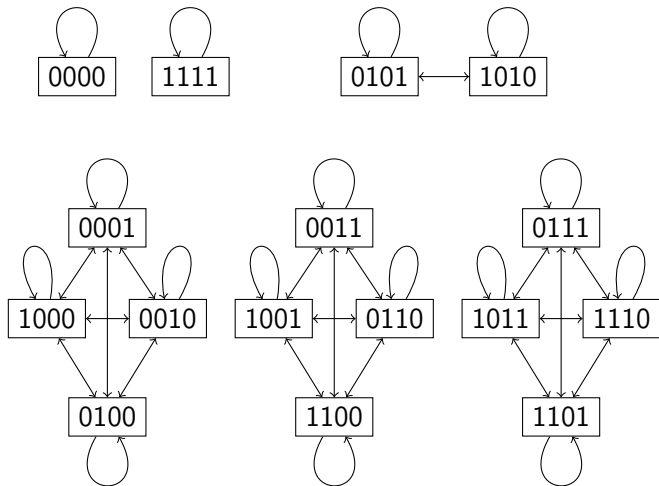
Да въведем релация $R \subseteq S^2$ така: за всеки $a, b \in S$, aRb тогава и само тогава, когато b е ротация на a . b е ротация на a т.с.т.к. съществуват булеви стрингове b_1, b_2 със сумарна дължина четири (тоест, $|b_1| + |b_2| = 4$; b_1 или b_2 може да е празният стринг, тоест, може $|b_1| = 0$ или $|b_2| = 0$), такива че $b = b_1b_2$ и $a = b_2b_1$.

Примерно, 0001 е ротация на 0100 с $b_1 = 00$ и $b_2 = 01$, 0101 е ротация на 1010, и така нататък.

R е релация на еквивалентност.

Релации на еквивалентност – пример (2)

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111



Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всеки $a \in A$ дефинираме множеството $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid aRb\}$.

В примера от миналия слайд:

$$[0000] = \{0000\}$$

$$[0001] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

$$[0010] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

$$[0011] = \{0011, 0110, 1100, 1001\}$$

$$[0100] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

$$[0101] = \{0101, 1010\}$$

$$[0110] = \{0011, 0110, 1100, 1001\}$$

$$[0111] = \{0111, 1110, 1101, 1011\}$$

$$[1000] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

...

$$[1111] = \{1111\}$$

Теорема 1

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Тогава фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A .

В примера със стрингове, те са 16 на брой, но фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ има само шест елемента:

$\{ \{0000\}, \{1111\}, \{0001, 0010, 0100, 1000\},$
 $\{0101, 1010\}, \{0011, 0110, 1100, 1001\}, \{0111, 1110, 1101, 1011\} \}$

Очевидно тази фамилия е разбиване на S .

Доказателство на Теорема 1:

- Всеки елемент на A е в поне един елемент на фамилията: очевидно, понеже в $\{[a] \mid a \in A\}$, a взема последователно стойностите на всички елементи от A ✓.
- Всеки елемент на фамилията е непразен: очевидно, понеже R е рефлексивна ✓.
- Всеки два различни елемента на фамилията имат празно сечение. Това е неочевидно.

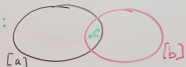
Класове на еквивалентност (4)

Лема $[a] \neq [b] \rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Д.вр Контрапозитивното е: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b]$

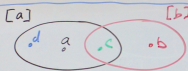
Допускаме, че $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ за някои $a, b \in A$

Визуално:



Щом $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, \forall
 $\exists c$, т.е. $c \in [a] \cap [b]$

Разглеждаме произволен d от $[a]$:



Знаем, че $a \in [a]$.
Знаем, че $b \in [b]$.

От допускането имаме $\begin{cases} c \in [a] \text{ (✓)} \\ c \in [b] \text{ (✓)} \end{cases}$

По дефиниция $[a] = \{x \in A \mid a R x\}$. Тогава $a R d$. Тогава $d R a$ (R е симетр.).
Също така $a R c$ (от \oplus). Щом $d R a$ и $a R c$, то $d R c$.

По деф. $[b] = \{x \in A \mid b R x\}$. Тогава $b R c$ (от \oplus). Тогава $c R b$ (R е симетр.).

Щом $d R c$ и $c R b$, то $d R b$ (R е транзит.). Щом $d R b$, то $b R d$ (R е симетр.).

Щом $b R d$, то $d \in [b]$. Докажем, че $d \in [a] \rightarrow d \in [b]$, за произволен d .

Следователно $[a] \subseteq [b]$.

Аналогично доказваме, че $[b] \subseteq [a]$.

Прилагаме Аксиомата за обема и получаваме: $[a] = [b]$

QED

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Съгласно Теорема 1, фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A . Елементите на тази фамилия се наричат *класовете на еквивалентност на R* .

Щом научим или установим, че дадена релация е релация на еквивалентност, първо трябва да съобразим кои са нейните класове на еквивалентност. Те характеризират релацията напълно, тоест, първичната дефиниция на релация на еквивалентност може да стане чрез класовете на еквивалентност.

Релации на частична наредба (partial order)

Релация е *релация на частична наредба* т.с.т.к. е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

От разгледаните релации върху реалните числа, $=$, \leq и \geq са частични наредби. \subseteq_S също е частична наредба.

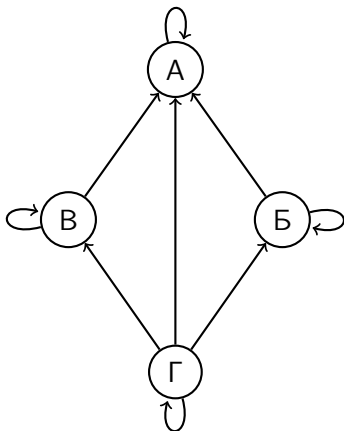
Релации на частична наредба (2)

Частични наредби се появяват, например, при класиране по повече от един критерии. Нека класираме програмисти по *C* и *Java*, с оценка (x, y) , където x е оценката по *C*, а y , по *Java*. Нека няма еднакви оценки по никой от езиците. Ясно ли е как да класираме?

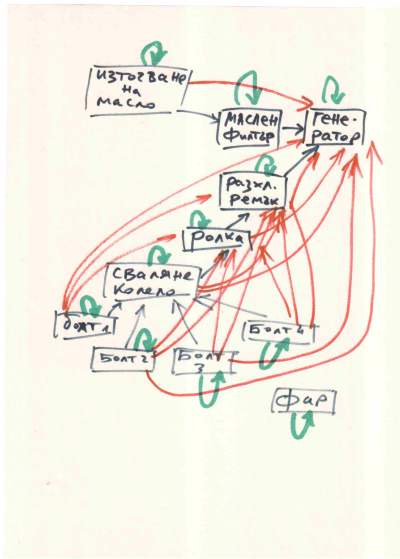
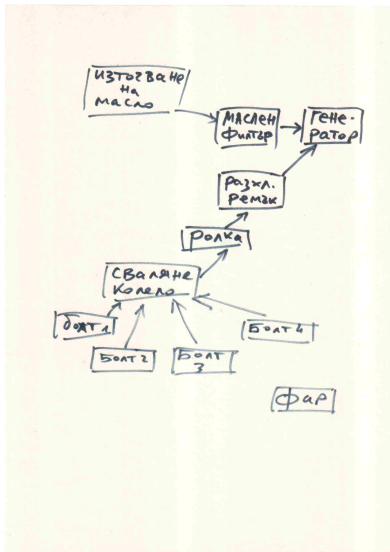
Не непременно. Ако Албена има $(6, 6)$, Борис има $(5, 5)$, Владо има $(4, 4)$ и Гергана има $(3, 3)$, нещата са ясни. Но ако Борис има $(5, 4)$, а Владо има $(4, 5)$, те двамата стават несравними.

При частичните наредби може (но не непременно!) да има несравними елементи. a и b са несравними, ако $\neg aRb$ и $\neg bRa$.

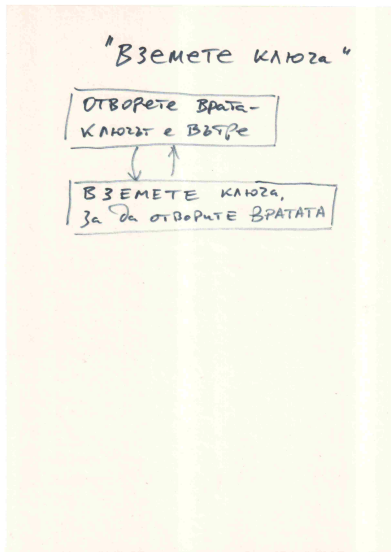
Пример за диаграма на частична наредба



Поява на частична наредба



От това няма да стане частична наредба



Релации на линейна наредба (linear order)

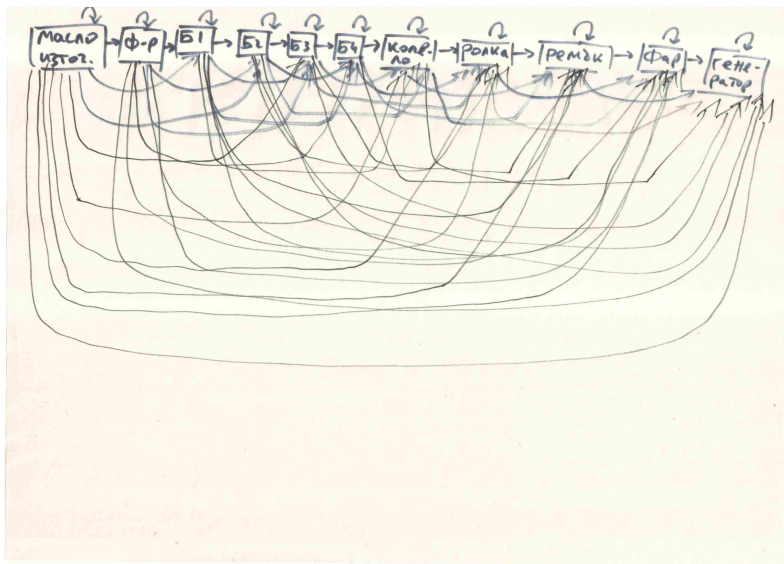
Релация е *релация на линейна наредба* т.с.т.к. е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Не може да има несравними двойки елементи заради силната антисиметричност.

Ако $R \subseteq A^2$ е линейна наредба и $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, то R има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ елемента.

Линейните наредби са частен случай на частичните – всяка линейна е частична, но обратното не е вярно.

Пример за линейна наредба



Влагане на частична наредба в линейна наредба (linear extension)

Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че R се влага в R' . Алтернативно, казваме, че R' е линейно разширение на R .

При $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, броят на линейните разширения варира много: от 1 (самата R е линейна наредба) до $n!$ (няма сравними елементи в R).

Ако $R \subseteq A^2$ е произволна релация и $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, верига в R е всяка редица

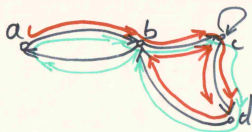
$$a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$$

където $i_0, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, ако $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ за $0 \leq j < k$. Ограничение за k няма; иначе казано, $k \geq 0$. Тогава един единствен елемент е верига.

Ако $a_{i_0} = a_{i_k}$ и $k > 0$, веригата е *контур*. Лесно се вижда, че $k > 0$ налага $k > 1$. Един единствен елемент не е контур.

Пример за верига и контур

Веригата е нещо като разходка в диаграмата, която не може да минава през примки, но може да повтаря върхове. Контурът е разходка, завършваща там, където е започнала.



В зърно
е релацията

abcdьcd е верига, не е
контур

babьcdь е верига и контур

Веригите никога не минават
през примки!

Теорема 2

Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна. Тогава R е частична наредба т.с.т.к. тя няма контури.

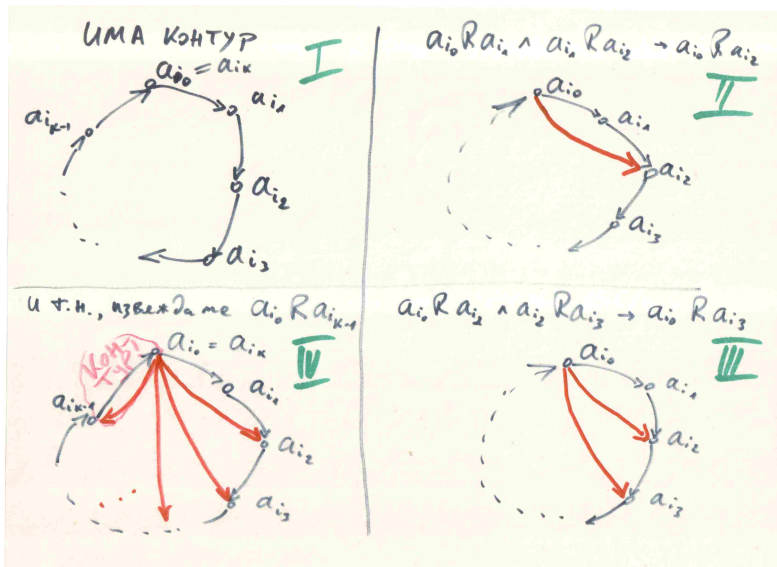
Доказателство, 1. Нека R е частична наредба. Ще докажем, че R няма контури. Допускаме противното: R има контур

$$a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k} = a_{i_0}$$

Щом $a_{i_0} R a_{i_1}$ и $a_{i_1} R a_{i_2}$, то от транзитивността на R следва, че $a_{i_0} R a_{i_2}$. Щом $a_{i_0} R a_{i_2}$ и $a_{i_2} R a_{i_3}$, то от транзитивността на R следва, че $a_{i_0} R a_{i_3}$. И така нататък. Щом $a_{i_0} R a_{i_{k-2}}$ и $a_{i_{k-2}} R a_{i_{k-1}}$, то от транзитивността на R следва, че $a_{i_0} R a_{i_{k-1}}$. Но $a_{i_{k-1}} R a_{i_0}$ от определението на “контур”. Тогава R не е антисиметрична. ✓

Частичните наредби нямат контури (3)

Илюстрация на част 1 от д-вото. Чете се в този ред: I, II, III, IV.



Частичните наредби нямат контури (3)

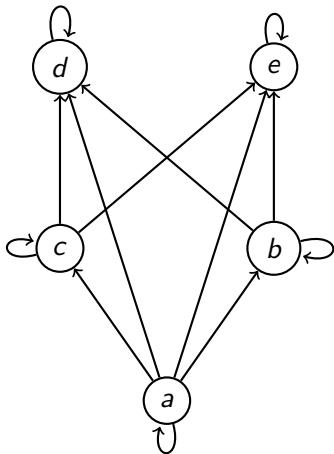
Доказателство, 2. Нека R няма контури. Ще докажем, че R е частична наредба. Допускаме противното: R не е частична наредба. Но в началото сме допуснали, че R е рефлексивна и транзитивна и това допускане е в сила. Щом R е рефлексивна и транзитивна, може да има една единствена причина тя да не е частична наредба – тя не е антисиметрична. Щом не е антисиметрична, задължително съществуват $a, b \in A$, такива че $a \neq b$ и aRb и bRa . Но тогава a, b, a е контур, противно на допускането, че R няма контури. ✓

Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, че a е *минимален* в R , ако $\neg \exists b \in A, b \neq a : bRa$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A, b \neq a : \neg bRa$.

Аналогично, a е *максимален* в R , ако $\neg \exists b \in A, b \neq a : aRb$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A, b \neq a : \neg aRb$.

Може да има повече от един минимален и повече от един максимален елемент. Може да няма минимален или максимален елемент.

Минимален и максимален елемент – примери



a е минималният, *d* и *e* са максималните.



Всеки елемент е и минимален, и максимален.

Минимален и максимален елемент – примери (2)

Ако R е линейна наредба и A е крайно множество, има точно един минимален и точно един максимален елемент (които съвпадат т.с.т.к. множеството има точно един елемент).

Обратното не е вярно: може да има точно един минимален и точно един максимален елемент, но наредбата да не е линейна – вижте примера на страница [31](#).

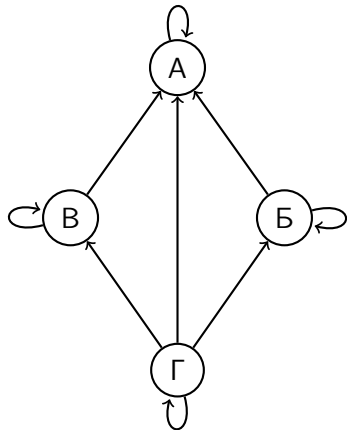
Ако A е безкрайно, може да няма минимален или максимален елемент. Например, \leq няма максимален елемент върху естествените числа, но има минимален елемент – нулата.

Върху целите числа тя няма нито минимален, нито максимален елемент.

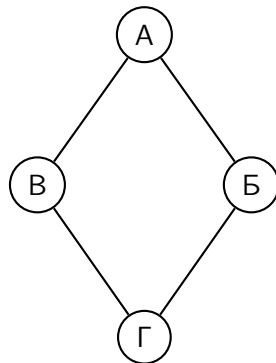
Удобен начин за изобразяване на малки релации на частична наредба. Започваме от диаграмата на релацията. Изпускаме примките – те се подразбират. Рисуваме диаграмата така, че стрелките сочат нагоре; може да не е директно нагоре, но краят на всяка стрелка да е по-високо от началото ѝ. Изпускаме стрелките, чието наличие следва от транзитивността – те се подразбират. Премахваме посоките на стрелките – и те се подразбират (отдолу нагоре).

Резултатът от тези опростявания се нарича *диаграма на Hasse*. Тя съдържа само съществената информация за релацията.

Диаграми на Hasse – пример



Релацията от страница 31



Нейната диаграма на Hasse.

Друг пример за диаграми на Hasse

Колко са частичните наредби над триелементен домейн?

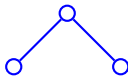
Правим всички диаграми на Hasse на три елемента без имена на елементите. Те са пет на брой. После съобразяваме за всяка от тях по колко различни начина можем да раздадем имената.



6



3



3



6



1

Общо, $6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 19$ частични наредби при три елемента.

КРАЙ