

ДОМАШНО № 2 ПО ДИСЦИПЛИНАТА “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”  
 ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “ИНФОРМАТИКА”, I КУРС,  
 ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2021/2022 УЧ. Г. В СУ, ФМИ

---

Име: ..... Факултетен № ..... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	ОБЩО
<i>получени точки</i>						
<i>максимум точки</i>	20	20	20	20	20	100

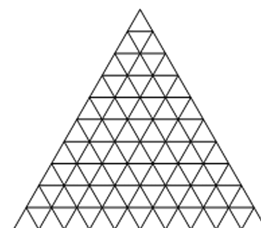
**Забележка 1:** Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

**Забележка 2:** Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!

---

**Задача 1.** В едно село има 20 деца. Всеки две деца от селото имат общ дядо, а всяко дете има двама дядовци. Да се докаже, че съществува дядо, който има поне 14 внуци в това село.

**Задача 2.** Равностранен триъгълник със страна  $n$  е разбит на равностранни триъгълници със страна 1 чрез прави, успоредни на страните му. Да се намери броят на равностранните триъгълници, чиито страни лежат върху отсечките на получения чертеж и имат произволни дължини от 1 до  $n$  включително, а пък върхът срещу водоравната страна се намира над нея (т.е. търсим броя на триъгълниците, сочещи нагоре).



*Упътване:* Използвайте сумиране или биекция.

**Задача 3.** За всяко реално число  $x > 0$  означаваме с  $K(x)$  броя на несъкратимите дроби  $\frac{a}{b}$  с цели  $a$  и  $b$ , за които  $1 \leq a \leq x$  и  $1 \leq b \leq x$ . Например  $K\left(\frac{5}{2}\right) = 3$ , защото съществуват точно три дроби  $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2} \text{ и } \frac{2}{1}\right)$ , чиито числители и знаменатели са цели числа от 1 до  $\frac{5}{2} = 2,5$  вкл. Ако  $n$  е цяло положително число, да се пресметне сборът

$$\sum_{j=1}^n K\left(\frac{n}{j}\right) = K(n) + K\left(\frac{n}{2}\right) + K\left(\frac{n}{3}\right) + K\left(\frac{n}{4}\right) + K\left(\frac{n}{5}\right) + \dots + K\left(\frac{n}{n}\right).$$

*Упътване:* Тази задача се решава най-лесно с помощта на комбинаторни разсъждения. Търсеният сбор има прост комбинаторен смисъл.

**Задача 4.** В равнината са дадени 102 точки, никои три от които не лежат на една права. Да се докаже, че измежду триъгълниците с върхове тези точки има поне 160 000 разностранни.

**Задача 5.** Разглеждаме подредби на предмети в кръг. Между предметите няма еднакви. Не различаваме подредби, които се получават една от друга чрез въртене и/или отражение.

а) Колко са подредбите на  $n$  предмета? **(7 точки)**

б) Докажете, че пет предмета могат да се подредят в кръг по 12 начина. **(3 точки)**

в) С помощта на пет цвята боядисайте ръбовете на правилен додекаедър така, че всеки от ръбовете да е оцветен с един цвят (да няма шарени ръбове), ръбовете на всяка стена (правилен петогълник) да съдържат всички цветове и всяка от дванайсетте стени да притежава различна подредба на цветовете. Нанесете отговора на чертежа тук. **(10 точки)**

