Домашно № 2 по дисциплината “Дискретни структури” за специалност “Информатика”, I курс, летен семестър на 2021/2022 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

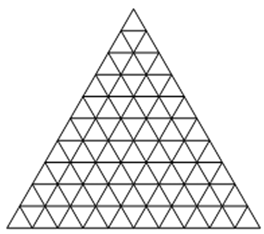
Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. В едно село има 20 деца. Всеки две деца от селото имат общ дядо, а всяко дете има двама дядовци. Да се докаже, че съществува дядо, който има поне 14 внуци в това село.

Задача 2. Равностранен триъгълник със страна n е разбит на равностранни триъгълници със страна 1 чрез прави, успоредни на страните му. Да се намери броят на равностранните триъгълници, чиито страни лежат върху отсечките на получения чертеж и имат произволни дължини от 1 до n включително, а пък върхът срещу водоравната страна се намира над нея (т.е. търсим броя на триъгълниците, сочещи нагоре).



Упътване: Използвайте сумиране или биекция.

Задача 3. За всяко реално число $x > 0$ означаваме с $K(x)$ броя на несъкратимите дроби $\dfrac{a}{b}$ с цели a и b, за които $1 \leq a \leq x$ и $1 \leq b \leq x$. Например $K\left(\dfrac{5}{2}\right) = 3$, защото съществуват точно три дроби $\left(\dfrac{1}{1}\,,\ \dfrac{1}{2}\ \text{ и }\ \dfrac{2}{1}\right)$, чиито числители и знаменатели са цели числа от 1 до $\dfrac{5}{2} = 2,5$ вкл. Ако n е цяло положително число, да се пресметне сборът

$$\sum_{j\,=\,1}^{n} K\left(\frac{n}{j}\right) = K(n) + K\left(\frac{n}{2}\right) + K\left(\frac{n}{3}\right) + K\left(\frac{n}{4}\right) + K\left(\frac{n}{5}\right) + \ \cdots\ + K\left(\frac{n}{n}\right)\cdot$$

Упътване: Тази задача се решава най-лесно с помощта на комбинаторни разсъждения. Търсеният сбор има прост комбинаторен смисъл.

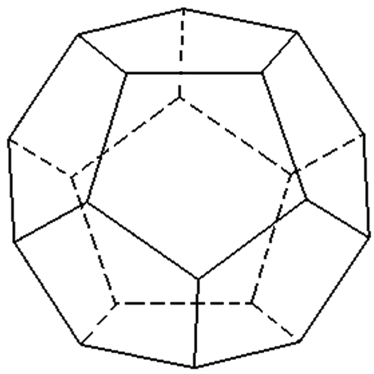
Задача 4. В равнината са дадени 102 точки, никои три от които не лежат на една права. Да се докаже, че измежду триъгълниците с върхове тези точки има поне 160 000 разностранни.

Задача 5. Разглеждаме подредби на предмети в кръг. Между предметите няма еднакви. Не различаваме подредби, които се получават една от друга чрез въртене и/или отражение.

а) Колко са подредбите на n предмета? **(7 точки)**

б) Докажете, че пет предмета могат да се подредят в кръг по 12 начина. **(3 точки)**

в) С помощта на пет цвята боядисайте ръбовете на правилен додекаедър така, че всеки от ръбовете да е оцветен с един цвят (да няма шарени ръбове), ръбовете на всяка стена (правилен петоъгълник) да съдържат всички цветове и всяка от дванайсетте стени да притежава различна подредба на цветовете. Нанесете отговора на чертежа тук. **(10 точки)**



РЕШЕНИЯ

Задача 1. Нека D е дядо с най-много внуци в това село. Нека D има k внуци от селото. Трябва да докажем, че $k \geq 14$. Ако $k = 20$, неравенството е изпълнено, затова нека $k \leq 19$. Очевидно $k \geq 1$ поради максималността на k.

Нека V е внук на D. Означаваме с $f(V)$ другия дядо на V — дядото, който е различен от D. Нека U е дете, което не е внук на D; има такова дете, защото $k \leq 19$. По условие е дадено, че децата U и V имат общ дядо, а V има двама дядовци — D и $f(V)$. Тъй като D не е дядо на U, то остава само $f(V)$ да бъде общ дядо на U и V.

Да фиксираме временно U и да оставим V да пробягва множеството от всички внуци на D. Тогава $f(V)$ приема поне една, но не повече от две стойности, защото U има двама дядовци. Ако $f(V)$ приема само една стойност T, то T би бил дядо на U и на внуците на D, тоест T би имал поне $k+1$ внуци в противоречие с избора на k. Значи $f(V)$ приема точно две стойности.

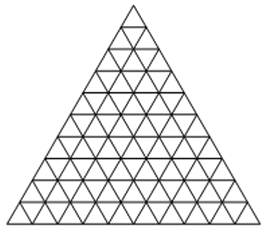
Променливата V пробягва k деца — внуците на D. През това време функцията $f(V)$ приема само две стойности — например X и Y. Следователно едната от тях (да кажем, X) се среща поне в половината случаи. Тоест X е дядо на поне $\dfrac{k}{2}$ деца измежду внуците на D.

По-горе установихме, че $f(V)$ е дядо на U за всяко дете V, което е внук на D. Следователно X и Y са двамата дядовци на U. Макар и фиксирано дотук, U беше избрано произволно измежду децата, които не са внуци на D. Следователно X и Y са дядовци на всички тези деца.

X има поне $\dfrac{k}{2}$ внуци сред внуците на D и е дядо на онези $20-k$ деца, които не са внуци на D. От максималността на k следва неравенството $\dfrac{k}{2} + 20 - k \leq k$. Решението му е $k \geq \dfrac{2}{3} \cdot 20 = 13\,\dfrac{1}{3}\cdot$ Понеже k е цяло число, то $k \geq 14$, тоест D има поне 14 внуци, което трябваше да се докаже.

Тази задача е от състезанието "Турнир на градовете".

Задача 2. Върховете на равностранните триъгълници, т.е. пресечните точки на линиите от чертежа, се разполагат във водоравни редици: в най-горната редица има една точка, във втората редица — две точки, в третата — три и т.н. Има всичко $n+1$ редици.



Да изрежем от шперплат равностранен триъгълник със страна k и да започнем да го налагаме върху чертежа така, че да сочи нагоре. Горният му връх може да попадне в която и да било точка от горните $n-k+1$ редици, затова броят на възможните местоположения на шперплатовия триъгълник е

$$1+2+3+\cdots+(n-k+1) = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}\cdot$$

Това число е броят на равностранните триъгълници със страна k, сочещи нагоре.

Остава да сумираме този израз по възможните стойности на дължината k — от 1 до n. Удобно е обаче първо да положим $n-k+1=s$; тази величина се изменя също от 1 до n, само че събираемите се опростяват до израза $\dfrac{s(s+1)}{2}\cdot$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{s(s+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}s^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\cdot$$

Това е броят на всички равностранни триъгълници на чертежа, сочещи нагоре.

Задача 3. В търсения сбор някои несъкратими дроби се броят по няколко пъти. По-точно, нека несъкратимата дроб $\dfrac{a}{b}$ се брои r пъти — по веднъж във всяко от първите r събираеми. Следователно целите положителни числа a и b не надхвърлят $\dfrac{n}{r}$, обаче поне едно от тях надхвърля $\dfrac{n}{r+1}$, иначе дробта $\dfrac{a}{b}$ би била броена поне $r+1$ пъти. Затова $ra \le n$ и $rb \le n$, но увеличим ли множителя, посоката на неравенството се обръща: $(r+1)a > n$ или $(r+1)b > n$. Това ни подсеща да разгледаме следните дроби, само първата от които е несъкратима:

$$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \cdots = \frac{ra}{rb} = \frac{(r+1)a}{(r+1)b} = \frac{(r+2)a}{(r+2)b} = \cdots$$

Числителите и знаменателите на първите r от тези дроби не надхвърлят n. За следващите дроби това не е така. Поради равенството на бройките $(r=r)$ можем да променим формулировката: вместо да казваме, че несъкратимата дроб $\dfrac{a}{b}$ се брои r пъти, ще смятаме, че всяка от дробите

$$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \cdots = \frac{ra}{rb}$$

се брои точно веднъж. А когато броим някакви обекти по веднъж, накрая получаваме броя им. Търсеният сбор е равен на броя на всички обикновени дроби — съкратими и несъкратими, — чиито числители и знаменатели са цели числа от 1 до n включително. За такава дроб има n възможности за числителя и n възможности за знаменателя, които се съчетават всяка с всяка. От правилото за умножение правим извод, че броят на тези дроби е $n \,.\, n = n^2$. Това е също стойността на търсения сбор.

Случаят $n = 100$ е бил даден на XXXV Московска олимпиада по математика през 1972 г.

Задача 4. Да допуснем противното: че има не повече от 159 999 разностранни триъгълника. Всеки триъгълник се определя еднозначно от трите си върха, като редът им няма значение. Затова триъгълниците са *комбинации без повторение* и броят им е равен на $C_{102}^{3} = 171\,700$. От допускането следва, че има поне $171\,700 - 159\,999 = 11\,701$ равнобедрени триъгълника. Техните основи са отсечки с краища измежду дадените 102 точки. Има $C_{102}^{2} = 5\,151$ отсечки. Тъй като $11\,701 : 5\,151 = 2$ и остатък $1\,399$, то от принципа на Дирихле следва, че съществуват най-малко три равнобедрени триъгълника с обща основа. Върховете срещу основата лежат на една права — симетралата на основата. Получава се противоречие с условието на задачата.

Задача 5. Нека n различни предмета са подредени в кръг. Можем да опишем подредбата им, като обходим кръга по часовника, започвайки от произволно избрано място. Получаваме редица, съдържаща всичките n предмета, тоест *пермутация без повторение* (предметите са различни). Има $P_n = n!$ такива редици.

Мястото, от което започваме да обикаляме кръга, може да бъде избрано по n начина, следователно от една подредба в кръг се получават n редици. Ето защо подредбите в кръг са n пъти по-малко от редиците, тоест съществуват всичко $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ подредби в кръг, ако не различаваме подредбите, получени чрез завъртане (обаче различаваме отраженията). Тази формула важи за всяко цяло $n \geq 1$.

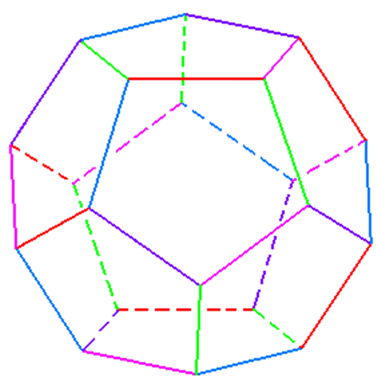
Ако искаме да не различаваме и отраженията, сливаме кръговите подредби две по две, тоест отъждествяваме всяка подредба с нейното отражение спрямо някоя фиксирана права. Следователно броят на подредбите намалява наполовина. Тоест има $\dfrac{(n-1)!}{2}$ подредби в кръг, ако не различаваме подредбите, които се получават една от друга чрез въртене и/или отражение. Тази формула важи за всяко цяло $n \geq 3$. (При $n \leq 2$ има само една подредба в кръг; тя съвпада с отражението си, затова броят не намалява наполовина, тоест делението на 2 е излишно.)

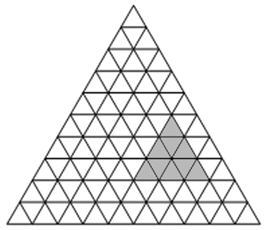
В получената формула заместваме $n = 5$:

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Това означава, че пет различни предмета могат да се подредят в кръг по дванайсет начина, ако смятаме за еднакви подредбите, получени една от друга чрез въртене и/или отражение.

За да онагледим този извод, боядисваме ръбовете на правилен додекаедър с пет цвята така, че всяка от дванайсетте петоъгълни стени на тялото да има различна подредба на цветовете. Едно възможно оцветяване е показано на картинката.





Задача 2 може да се реши и по друг начин — без сумиране. Водоравните редици от точки да номерираме отгоре надолу с числата $1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,\ n+1$. Във всяка водоравна редица номерираме точките отляво надясно с числата $1,\ 2,\ 3,\ \dots$ Всеки равностранен триъгълник се описва еднозначно посредством наредена тройка числа $\Big(a\,;\ b\,;\ c\Big)$, в която b е номерът на реда на горния връх и показва колко нагоре или надолу се намира триъгълникът, a е номерът на горния връх в собствения му ред и показва колко надясно в реда е триъгълникът, c е номерът на реда на основата на триъгълника и показва колко голям е триъгълникът.

Трите числа a, b и c са цели, като a и b приемат стойности от 1 до n включително, а пък числото c е между 2 и $n+1$ включително. Освен това, $a \leq b < c$.

Това, че третото число приема стойности в различен интервал, е недостатък. Ето защо полагаме $d = c - 1$. Целите числа a, b и d са от 1 до n включително, като $a \leq b \leq d$.

Двойното неравенство ни задължава да броим не всички, а само някои наредени тройки. По-добре е да броим ненаредените тройки $\Big\{a\,;\,b\,;\,d\Big\}$, защото от всяка ненаредена тройка можем да възстановим стойностите на трите променливи, като подредим числата в нарастващ ред.

П р и м е р : На сивия равностранен триъгълник, показан на чертежа по-горе, съответства ненаредената тройка $\Big\{5\,;\ 6\,;\ 8\Big\}$, защото горният му връх е точка № $a = 5$ от ред № $b = 6$, а основата му лежи на ред № $c = 9$, следователно $d = c - 1 = 8$.

Обратно, за всяка ненаредена тройка от разглеждания вид има равностранен триъгълник: горният му връх е точка № a от ред № b (съществува такава точка, защото $1 \leq a \leq b \leq n$), а основата на триъгълника лежи на ред № $c = d + 1$ (има такъв ред, тъй като $2 \leq c \leq n+1$). Средата на основата е точно под горния връх. Триъгълникът сочи нагоре, защото $b \leq d < c$.

Заради биекцията можем вместо триъгълниците да броим ненаредените тройки $\Big\{a\,;\ b\,;\ d\Big\}$, допускайки равенство на елементите им, т.е. тройките са *комбинации с повторение* и броят им е

$$\widetilde{C}_n^{\,3} \;=\; \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\,.$$

Това е броят на всички равностранни триъгълници на чертежа, сочещи нагоре.

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Задача 1 и **задача 3** се оценяват всяка с по 20 точки в зависимост от пълнотата на решението.

Задача 2 носи 20 точки. Ако се решава по първия начин, всеки етап носи 10 точки:
— пресмятане на броя на равностранните триъгълници с даден размер;
— сумиране по всевъзможните дължини на страните.

Задача 4 носи 20 точки — по 4 точки за всяка стъпка:
— преброяване на всички триъгълници;
— преброяване на равнобедрените триъгълници;
— преброяване на отсечките;
— доказване, че има поне три равнобедрени триъгълника с обща основа;
— достигане до противоречие с помощта на симетралата.

Задача 5 носи 20 точки, разпределени, както е указано в условието.