Домашно № 4 по дисциплината “Дискретни структури” за специалност “Информатика”, I курс, летен семестър на 2021/2022 уч. г. в СУ, ФМИ

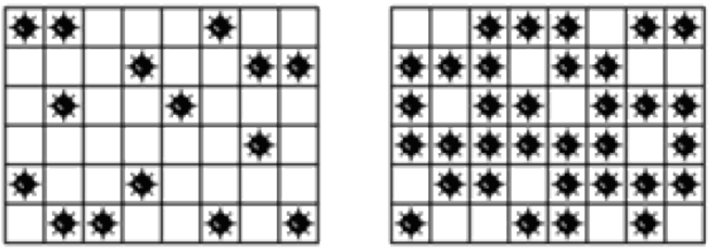
Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*20*	*45*	*18*	*17*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

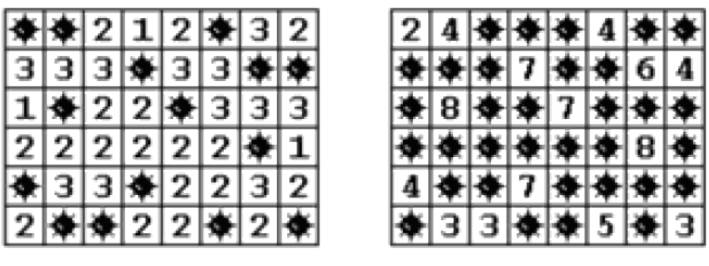
Задача 1. Игралното поле на Minesweeper се състои от клетки. В някои клетки има мини. Останалите клетки са свободни. Допълнението на игрално поле се получава, като поставим мини в свободните клетки и премахнем мините от клетките, които дотогава са били заети.



Игрално поле и неговото допълнение.

Във всяка празна клетка записваме цяло неотрицателно число — броя на съседните клетки, заети от мини. (В клетките с мини не пишем числа.) Съседни са тези клетки, които притежават общ ръб или общ връх. Например всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има осем съседни клетки.

Забележителен факт е, че всяко игрално поле и неговото допълнение имат еднакъв сбор от числата, записани в клетките. Например за показаното тук игрално поле този сбор е 75.



Игралното поле и допълнението му имат еднакъв сбор (75).

Още по-интересно е, че това свойство важи за всяка релация на съседство между клетките.

а) Разгледайте следната релация на съседство: две клетки са съседни само ако имат общ ръб. Така всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има четири съседни клетки. За разположението на мините от примера по-горе проверете, че равенството на сборовете важи и за тази релация на съседство. **(5 точки)**

б) С теорията на графите докажете равенството на сборовете. Доказателството трябва да важи за всяко игрално поле и всяка симетрична релация на съседство между клетките. **(15 точки)**

Задача 2. Върху сфера са прекарани n големи окръжности (такива, чийто център съвпада с центъра на сферата). Никои три от тях не минават през една точка. Тези n окръжности разделят сферата на области. Две области са съседни, ако контурите им имат обща дъга (с положителна дължина); не е достатъчно контурите им да имат една или две общи точки.

а) Пресметнете броя на областите. **(5 точки)**

б) Докажете, че областите могат да бъдат оцветени с два цвята (бял и черен) по такъв начин, че съседните области да са разноцветни. **(5 точки)**
Докажете, че има само две такива оцветявания и едното е негатив на другото. **(10 точки)**

в) За кои n белите области са четен брой? А черните? **(5 точки)**

г) Пътешественик иска да обиколи областите, като мине през всяка по веднъж, започвайки от произволно избрана област (без да се връща в нея накрая). Той може да минава през границите между областите, но не и през пресечните точки на дадените n големи окръжности. Докажете, че ако n е кратно на 4 и $n > 0$, пътешествието е неосъществимо. **(10 точки)**

Подточка "г" и втората част на подточка "б" имат връзка с теореми от теорията на графите. Кои са тези теореми? **(10 точки)**

Задача 3. Намерете $\chi'(K_n)$ — хроматичния индекс на пълния неориентиран граф с n върха.

Задача 4. Нека $G(V, E)$ е краен неориентиран граф без примки и без изолирани върхове, $n = |V|$ е броят на върховете на G. За всеки връх $v \in V$ означаваме с $d(v)$ степента му, т.е. броя на ребрата, които излизат от него, и полагаме

$$k(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{\substack{u: \\ \{u, v\} \in E}} d(u), \qquad D = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v), \qquad K = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} k(v).$$

а) Докажете, че $D \leq K$. **(15 точки)**

б) Предложете подходящо практическо тълкуване на това неравенство. **(2 точки)**