1,5

$R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$

$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

pe(φ) $\forall u \in (\mathbb{N}^+)^2 (uRu)$

$(a,b) \quad (a,b) R (a,b) ? \Leftrightarrow ab = ba$

$ab = ba$ ✓

c(u,m)? $(a,b) R (c,d) \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

$\underline{(a,b) R (c,d)} \Rightarrow ad = cb \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow$

$(c,d) R (a,b)$

T(a,H,b)? $(a,b) R (c,d) \wedge (c,d) R (e,f) \Rightarrow (a,b) R (e,f)$

$\left| \begin{array}{l} ad = bc \\ cf = de \end{array} \right. \Rightarrow a\cancel{d}cf = bc\cancel{d}e \Leftrightarrow af = be$

$\Updownarrow$

$(a,b) R (e,f)$

1.6

$(X,Y) \in R \Leftrightarrow \boxed{X \setminus Y = \emptyset} \Leftrightarrow \boxed{X \subseteq Y}$

1.7 $R \subseteq \mathbb{Z}^2$

$aRb \iff (a-b)$ се дели на $3 \iff a-b=3t,\ t\in\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

~~$a \equiv b \pmod 3$~~

Р(еф) $aRa \iff a-a=3t \iff 0=3t$ при $t=0\in\mathbb{Z}$ е изпълнено

(сим) ? $aRb \Rightarrow bRa$

Нека $aRb \Rightarrow a-b=3t_0,\ t_0\in\mathbb{Z}$. $(b-a)=3(-t_0)$,

$-t_0\in\mathbb{Z} \Rightarrow bRa$

Тр(анз)? $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Нека $aRb \Rightarrow a-b=3t_1,\ t_1\in\mathbb{Z}$

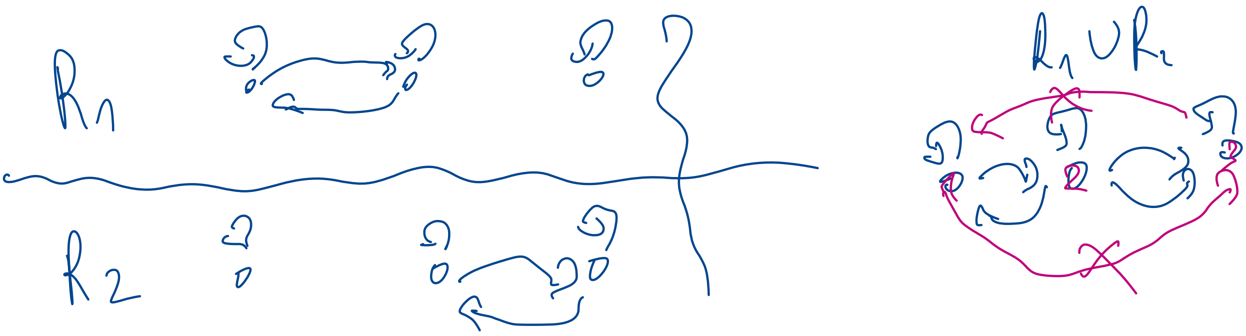
$bRc \Rightarrow b-c=3t_2,\ t_2\in\mathbb{Z}$

$a-b+b-c=3t_1+3t_2$

$a-c=3(t_1+t_2),\ (t_1+t_2)\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow aRc$

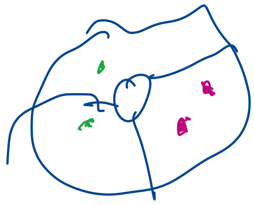
$aRb \iff f(a) \boxed{=} f(b)$



R_1	$\exists ?$
R_2	$\exists ?$

$R_1 \triangle R_2$

$\exists ?$



A - множество

$R_1, R_2 \subseteq A^2$ са релации на еквивалентност

Докажете, че $\underbrace{R_1 \cap R_2}_{R}$ е РСТ

(реф) $\forall x \in A\,(xRx)$

$x \in A$ произволно $\Rightarrow (x,x) \in R_1$, $(x,x) \in R_2 \Rightarrow (x,x) \in R_1 \cap R_2 = R$

(сим) $\forall x,y \in A\,(xRy \Rightarrow yRx)$

$x,y \in A$ произволни. Нека xRy.

$\Rightarrow (x,y) \in R = R_1 \cap R_2 \Rightarrow (x,y) \in R_1 \Rightarrow (y,x) \in R_1$; $(x,y) \in R_2 \Rightarrow (y,x) \in R_2 \Rightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2 = R$

(транз) $\forall x,y,z \in A\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

$x,y,z \in A$ произволни. Нека xRy и yRz

$\Rightarrow (x,y) \in R$, $(y,z) \in R \Rightarrow (x,y) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_1 \Rightarrow (x,z) \in R_1$; $(x,y) \in R_2 \wedge (y,z) \in R_2 \Rightarrow (x,z) \in R_2 \Rightarrow (x,z) \in R_1 \cap R_2 = R$

антисиметрична

транзитивна

рефлексивна

$\boxed{\leq}$

Зад. 73

- min $\boxed{✓}$, max $\boxed{✗}$ $\rightarrow$ $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- min $\boxed{✗}$, max $\boxed{✓}$ $\rightarrow$ $\leq \subseteq \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-$
- min $\boxed{✗}$, max $\boxed{✗}$ $\rightarrow$ $\leq \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

7.77) $R \subseteq S^2$, $S = \{1, 2, \ldots, 32\}$

$aRb \iff b-a \equiv 0 \pmod 3 \wedge a-b \geq 0$

$\iff$

$b \equiv a \pmod 3 \wedge a \geq b$

реф) $\forall a \in S\,(aRa)$

Нека $a \in S$ произволно. $a \equiv a \pmod 3$, $a \geq a$ $\Rightarrow aRa$

антисим) $\forall a,b \in S\,(aRb \wedge a \neq b \Rightarrow b \not R a)$

Нека $a, b \in S$ произволни. Нека aRb и $a \neq b$.

$\Rightarrow b \equiv a \pmod 3$

$a \geq b$, $a \neq b \Rightarrow a > b \Rightarrow b \not\geq a \Rightarrow b \not R a$

транз) $\forall a,b,c \in S\,(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

Нека $a,b,c \in S$ произволни. Нека aRb и bRc

$\Rightarrow$ $a \geq b$, $b \geq c \Rightarrow a \geq c$

$b \equiv a \pmod 3$, $b \equiv c \pmod 3 \Rightarrow a \equiv c \pmod 3$

$a \equiv b \pmod 3$

$\Rightarrow aRc$

16 ~~Vik~~ ~~2~~

$\boxed{R}$
23 R 26

16 R 13

17 R 16

17 ≥ 16

17 ≢ 16 (mod 3)

eRb

max = {0, 1, 2}.
min = {{0, 3, 1, 5, 2}.

ok ?

0 1 2

3 4 5

{{1, 2, 8}}

{{1}, {2}, {3}}

{{1, 2}, {3}} + 3

1.14.4

A – множество

R – релация, която е частична наредба

Д-те, че $\underbrace{R \cap R^{-1}}_{\rho}$ е релация на еквивалентност

$R^{-1} = \{ \langle b,a \rangle \mid \langle a,b \rangle \in R \}$. $\boxed{\forall R = (R^{-1})^{-1}}$

рефл) $\forall x \in A (x \rho x)$

Нека $x \in A$. $\Rightarrow xRx \Rightarrow xR^{-1}x \Leftarrow (x,x) \in R^{-1}$, xRx, $(x,x) \in R$ $\Rightarrow (x,x) \in R \cap R \Rightarrow$ …

(сим) $\forall x,y \in A (x \rho y \Rightarrow y \rho x)$

Нека $x,y \in A$. Нека $x \rho y \Rightarrow (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$

$(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in (R^{-1})^{-1} = R$

$\Downarrow$

$(y,x) \in R^{-1} \cap R = \rho$

транз) $\forall x,y,z (x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$

Нека $x,y,z \in A$. Нека $x \rho y$ и $y \rho z$

$\Rightarrow (x,y) \in R$ $(y,z) \in R$ $\Downarrow$ $(y,x) \in R^{-1}$ $(z,y) \in R^{-1}$

$(x,y) \in R^{-1}$ $(y,z) \in R^{-1}$ $\Downarrow$ $(y,x) \in R$ $(z,y) \in R$

$(z,y)\in R$ $\overset{\text{тран}}{\Rightarrow}$ $(z,x)\in R$ $\Rightarrow (z,x)\in R\cap R^{-1}$

$(y,x)\in R$

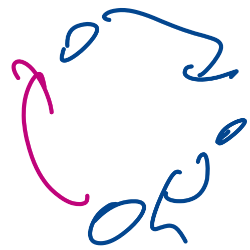
$(x,y)\in R$ $\Rightarrow (x,z)\in R \Rightarrow (z,x)\in R^{-1}$

$(y,z)\in R$

$\Rightarrow (z,x)\in P \overset{\text{сим}}{\Rightarrow} \underbrace{(x,z)\in P}_{xPz}$

7.15 $R\subseteq A^2$

упр. $\leftrightarrow \forall a,b,c\in A\,(aRb \wedge bRc \to cRa)$



Док-ть

R – циркулярна $\Leftrightarrow$ R – экв. отн. [illegible]

R – рефлексивна

(⇒)

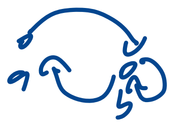
1) реф. ✓

2) сим. - $\forall a,b \in A\,(aRb \Rightarrow bRa)$

$a,b \in A$ са произволни. Нека aRb.

Знаем, че bRb (R е реф.)

$$\begin{matrix} aRb \\ bRb \end{matrix} \xRightarrow{\text{цирк.}} bRa$$



3) транз.) - $\forall a,b,c \in A\,(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

Нека $a,b,c \in A$. Нека aRb и $bRc \Rightarrow cRa$

$$\begin{matrix} cRa \\ R\text{-сим.} \end{matrix} \Rightarrow aRc$$

$\Rightarrow R$ е релация на еквивалентност

(⇐)

1) реф ✓

2) Циркулярно $\Leftrightarrow \forall a,b,c \in A\,(aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa)$

Нека $a,b,c \in A$. Нека aRb и $bRc \xRightarrow{\text{транз.}} aRc$

$\xRightarrow{\text{сим.}} cRa$

1.2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - изброимо?

$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\downarrow$

$\boxed{2^a(2b+1)}$

$\boxed{1.2}$

10110 11 0

0	0
.	1 ε
1	10
3	11

$b_k b_{k-1} \dots b_0 \in S_{bool}$

$\downarrow \alpha$

$\boxed{1 b_k b_{k-1} b_{k-2} \dots b_{0_{(2)}} - 2} \in \mathbb{N}$

1.3)

Лексикогр. наредба

1) Сума ✓

2) лексикографска наредба ~

1

1, 1

1, 1, 1

1, 1, ... —

2

$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$

$\boxed{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}}$

$\boxed{q, k}$

$f: K \to L$

$f(a,b) = (a, 3a)$

1) ін'єкція

$f(a_1,b_1) = f(a_2,b_2)$

$\Leftrightarrow (a_1,3a_1) = (a_2,3a_2)$

$\Rightarrow a_1 = a_2$

$(a_1,a_1) \in K$

$b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{2} = b_2$

$\Rightarrow (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$

2) сюр'єкція

$(a,b) \in L, \ a \neq 0$

$\Rightarrow b = 3a$

$(a, \frac{a}{2}) \in K$

$f(a, \frac{a}{2}) = (a, 3a) = (a, b)$

~~$A: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$~~

$A_\alpha \to \alpha \in \mathbb{R}$

$A(\alpha)$ $\boxed{A(\mathbb{R})}$

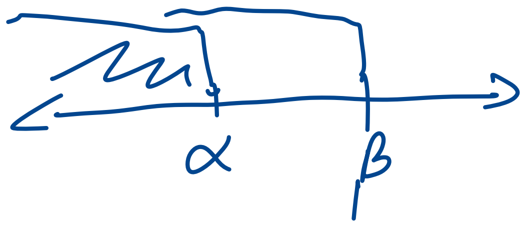
$A^*_\alpha = (-\infty; \alpha] \cap \mathbb{Q}$

$A^\#_\alpha \subseteq \mathbb{Q}$

1) [illegible]

$A_\alpha, A_\beta, \ \alpha \neq \beta, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

БОО $\alpha \leq \beta$



$A_\alpha \subseteq A_\beta$ ✓ $(A_\alpha \subset A_\beta)$

Знаємо, що $\exists q \in \mathbb{Q} \in (\alpha, \beta)$

↳ $q \notin A_\alpha$ і $q \in A_\beta \Rightarrow A_\alpha \neq A_\beta$

$\Rightarrow A_\alpha \subset A_\beta$

F

$\mathbb{R} \rightleftarrows F \not\Rightarrow N$

A, B, C, D —

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax+By+Cz+D=0\}$$

Eg

$$S_2 = \{(t^5, t^3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

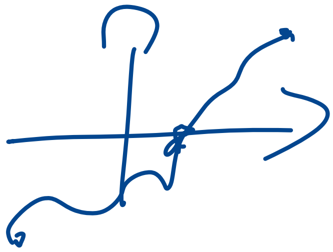
π: $Ax+By+Cz+D=0$

$V = At^5+Bt^3+Ct+D=0$

$A \geq 0$

$t \to +\infty \quad V \to +\infty$

$t \to -\infty \quad V \to -\infty$



$S_3 = \{(t^5+t, t^3+t, t+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

π: $Ax+By+Cz+D=0$

$At^5+Bt^3+Ct+(A+B+C)t+D=0$

1) База ~~слаба~~ $n=0$

2) ИП допускаме, че $P(n)$

1) База

2) ИП $P(0) \wedge P(1) \ldots \wedge P(n)$

$\boxed{1.13}$

$R \subseteq (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+)^2$

$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$

$\Leftrightarrow$

$a-b = c-d$

$\{ \{ (z, z+k) \mid z \in \mathbb{Z}^+, k+z \in \mathbb{Z}^+ \} \mid k \in \mathbb{Z} \}$