Примерни решения на семестриалното контролно по Дискретни Структури, КН 2 поток, 02.12.2022 г.

Зад. 1 Нека n е цяло положително число. Казваме, че n е *безквадратно*, ако единственият точен квадрат, който дели n, е 1. С други думи, ако $n = 1$, то n е безквадратно по определение, а ако $n \geqslant 2$, то n има едно единствено разлагане на прости множители (съгласно основната теорема на аритметиката) и n е безквадратно тстк всеки прост множител участва със своята първа степен; ако простите множители на n са $p_1, p_2, \ldots, p_q$, то n е безквадратно тстк $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_q$. Всяко просто число е безквадратно, но не всяко безквадратно е просто. Примерно, безквадратно е 10, защото $10 = 2 \cdot 5$, безквадратно е 11, защото 11 е просто, и 33 също е безквадратно, защото $33 = 3 \cdot 11$. Но 12 не е безквадратно, защото $12 = 2^2 \cdot 3$. Числото 27 също не е безквадратно, защото $27 = 3^3$. Безквадратните числа, ненадхвърлящи 40, са

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39$$

Намерете броя на безквадратните числа, ненадхвърлящи 200, като използвате принципа на включването и изключването. Иска се отговор-число.

Решения, които не използват принципа на включването и изключването, няма да получат точки.

Решение: За целите на тази задача, универсумът е множеството $U = \{1, 2, \ldots, 200\}$. Забелязваме, че число n не е безквадратно тстк съществува просто число p, такова че n се дели на p^2. Тъй като 13 е просто и $13^2 = 169$, което е по-малко от 200, а следващото просто е 17 и $17^2 = 289$, което е по-голямо от 200, има смисъл да разглеждаме само прости множители, ненадхвърлящи 13. За целите на задачата, нека

$$P = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant 13 \wedge k \text{ е просто}\}$$

Лесно се вижда, че $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, така че $|P| = 6$. За всяко $k \in P$, дефинираме множеството

$$A_k = \{j \in U \mid \exists k \in P : k^2 \text{ дели } j\}$$

Множеството от безквадратите числа, ненадхвърлящи 200, е

$$\bigcap_{i \in P} \overline{A_i} = \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_{11}} \cap \overline{A_{13}}$$

Търсим $\left|\bigcap_{i \in P} \overline{A_i}\right|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{i \in P} \overline{A_i}\right| = |U| & \\
& - \sum_{i \in P} |A_i| \\
& + \sum_{i,j \in P,\quad i<j} |A_i \cap A_j| \\
& - \sum_{i,j,k \in P,\quad i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
& + \sum_{i,j,k,\ell \in P,\quad i<j<k<\ell} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| \\
& - \sum_{i,j,k,\ell,m \in P,\quad i<j<k<\ell<m} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell \cap A_m| \\
& + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}|
\end{aligned}$$

Ключови наблюдения са следните.

- За всяко $i \in P$, $|A_i| = \left\lfloor \frac{200}{i^2} \right\rfloor$.
- За всеки $i, j \in P$, такива че $i < j$, $|A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{200}{i^2 \cdot j^2} \right\rfloor$. Обаче единствените такива двойки (i, j), за които $i^2 \cdot j^2 \leqslant 200$, са

- $(2,3)$, понеже $2^2 3^2 = 36$,
- $(2,5)$, понеже $2^2 5^2 = 100$ и
- $(2,7)$, понеже $2^2 7^2 = 196$.

Очевидно $2^2 11^2 = 484$, а $3^2 5^2 = 225$. Тогава $\sum\limits_{i,j \in P,\quad i<j} |A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{200}{2^2 3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{2^2 5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{2^2 7^2} \right\rfloor$, понеже останалите събираеми са нули.

- За всеки $i, j, k \in P$, такива че $i < j < k$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$, понеже за всяка такава тройка (i, j, k) е вярно, че $i^2 \cdot j^2 \cdot k^2 > 200$. За да се убедим в това, да съобразим, че $2^2 3^2 5^2 = 900$, а за останалите тройки произведението е дори по-голямо. Тогава $\sum\limits_{i,j,k \in P,\quad i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$.

Заключаваме, че само първите три реда в сумата имат ненулеви събираеми. А именно,

$$
\begin{aligned}
\left| \bigcap_{i \in P} \overline{A_i} \right| &= 200 \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{200}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{11^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{13^2} \right\rfloor \right) \\
&\quad + \left(\left\lfloor \frac{200}{2^2 3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{2^2 5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{2^2 7^2} \right\rfloor \right) \\
&= 200 - \left(\left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{49} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{121} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{169} \right\rfloor \right) \\
&\quad + \left(\left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{196} \right\rfloor \right) \\
&= 200 - (50 + 22 + 8 + 4 + 1 + 1) + (5 + 2 + 1) = \\
&= 200 - 86 + 8 = \\
&= 122
\end{aligned}
$$

И така, отговорът е 122.

Зад. 2 Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Представете си правоъгълник $2 \times n$ сантиметра и неограничен брой малки правоъгълничета 1×2 сантиметра, както и неограничен брой квадратчета 2×2 сантиметра. *Покриване* на големия правоъгълник $2 \times n$ е всяко слагане на малки правоъгълничета или квадратчета върху големия правоъгълник, такова че никои две от тях не се припокриват и не остава непокрита част. Очевидно сумарната площ на фигурите, участващи в покриването, е $2n$.

10 т. • Съставете рекурентно уравнение за броя на покриванията.

10 т. • Решете рекурентното уравнение.

Решение: Нека a_n означава броя на покриванията. Да си представим големия правоъгълник разположен така, че страната с дължина 2 е вертикална, която влече, че страната с дължина n е хоризонтална. Да си представим произволно покриване като процес, който започва в лявата част на големия правоъгълник.

- Ако започнем с вертикално малко правоъгълниче вляво, остава правоъгълник $2 \times (n-1)$ за покриване; ако $n > 1$, можем да покрием тази оставаща фигура по a_{n-1} начина.
- Ако започнем с хоризонтално малко правоъгълниче вляво, няма значение долу или горе, налага се да сложим още едно малко правоъгълниче над или под него и остава правоъгълник $2 \times (n-2)$ за покриване; ако $n > 2$, можем да покрием тази оставаща фигура по a_{n-2} начина.
- Ако започнем с квадратче вляво, остава правоъгълник $2 \times (n-2)$ за покриване; ако $n > 2$, можем да покрием тази оставаща фигура по a_{n-2} начина.

Тези три започвания са две по две несъвместими, а други започвания няма. Заключаваме, че покриванията на $2 \times n$ правоъгълника се разбиват на тези, които имат вертикално правоъгълниче вляво, тези, които имат хоризонтално правоъгълниче вляво, и тези, които имат квадратче вляво. Съгласно комбинаторния принцип на разбиването, в сила е $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, стига $n > 2$. Ако $n = 1$ има точно един начин, а ако $n = 2$ има точно три начина. Въз основа на тези разсъждения конструираме рекурентното уравнение

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 3, & \text{ако } n = 2 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{ако } n > 2 \end{cases}$$

Това е хомогенно линейно рекурентно уравнение с константни коефициенти и крайна история и е решимо с метода, изучаван на лекции. Характеристичното уравнение е

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Корените са 2 и -1. Тогава общото решение е

$$a_n = A2^n + B(-1)^n$$

за някакви константи A и B. Да ги намерим. Имаме

$$a_1 = 2A - B$$
$$a_2 = 4A + B$$

Но от началните условия знаем, че $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$. Тогава

$$1 = 2A - B$$
$$3 = 4A + B$$

Тогава

$$4 = 6A$$

откъдето $A = \frac{2}{3}$. Тогава $1 = \frac{4}{3} - B$, откъдето $B = \frac{1}{3}$. Тогава решението е

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3}$$

Зад. 3 Магазин за сандвичи предлага петнадесет различни вида сандвичи. Петима приятели купуват общо по един сандвич от всеки вид. По колко начина може да бъдат раздадени сандвичите на хората, така че всеки да получи един и същи брой саднвичи? Не се иска числен отговор.

Решение: Очевидно всеки човек получава $\frac{15}{5} = 3$ сандвича. Нека хората са А, Б, В, Г и Д. Да си представим раздаването на сандвичите като процес, в който първо А взема своите сандвичи, после Б и така нататък. Щом сандвичите са два по два различни, има $\binom{15}{3}$ начина А да вземе три сандвича. Остават 12 сандвича. За всеки от начините А да си вземе сандвичите, има $\binom{12}{3}$ начина Б да вземе своите. И така, за А и Б има $\binom{15}{3}\binom{12}{3}$ начина. Ако продължим да разсъждаваме по същия начин, за А, Б и В има $\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}$ начина, за А, Б, В и Г има $\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}$ начина, и решението е $\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ начина. Забележете, че $\binom{3}{3} = 1$, което точно съответства на факта, че последният (Д), който взема сандвичи, трябва да вземе трите сандвича, останали след изборите на А, Б, В и Г.

Алтернативно, можем да запишем отговора като

$$\frac{15!}{(3!)^5}$$

Численият отговор, който не се иска, е $168\,168\,000$.

Зад. 4 Представете си 101 цели положителни числа, наредени в кръг. Известно е, че сумата на всички тях е 300. Докажете, че съществува непрекъсната поредица от тях по отношение на кръговата наредба, такава че числата от тази непрекъсната поредица имат сума 200.

Решение: Нека числата са a_1, …, a_{101}. БОО, нека са наредени по този начин в кръговата наредба. Нека $S_j = a_1 + \cdots + a_j$, за $j \in \{1, 2, \ldots, 101\}$. Забелязваме, че ако $1 \leqslant i < k \leqslant 101$, то $S_i < S_k$, понеже числата са положителни. И така, нито две суми S_i и S_k не са равни. Тогава $\{S_j \mid 1 \leqslant j \leqslant 101\}$ е множество със сто и един елемента.

Да си представим числата S_1, …, S_{101}, написани в десетична позиционна бройна система. Нека y_j е числото, състоящо се от последните две цифри на S_j; иначе казано, y_j е S_j по модул 100. За всяко $j \in \{1, 2, \ldots, 101\}$ е вярно, че $y_j \in \{0, 1, \ldots, 99\}$. Съгласно принципа на Дирихле съществуват y_i и y_k, такива че $1 \leqslant i < k \leqslant 101$ и $y_i = y_k$.

Разлеждаме разликата $S_k - S_i$. Последните две цифри на тази разлика са нули. Но $0 < S_k - S_i$ и $S_k - S_i < 300$; последното е вярно, понеже и S_k, и S_i не надхвърлят 300 и са положителни. Тогава или $S_k - S_i = 100$, или $S_k - S_i = 200$. Ако $S_k - S_i = 200$, то числата a_{i+1}, a_{i+2}, …, a_k имат сума 200; забележете, че тези числа са непрекъсната поредица по отношение на кръговата наредба. Ако $S_k - S_i = 100$, то останалите числа—които също са непрекъсната поредица по отношение на кръговата наредба—имат сума 200.

Зад. 5 Всяка релация от вида $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{A}$, която е рефлексивна и транзитивна, се нарича *преднаредба*. Нека R е преднаредба. За всяко $a \in \mathsf{A}$ дефинираме, че $c(a) = \{b \in \mathsf{A} \,|\, a\mathsf{R}b \wedge b\mathsf{R}a\}$. Докажете, че фамилията $\mathcal{F} = \{c(a) \,|\, a \in \mathsf{A}\}$ е разбиване на A.

Ако сте дали коректно доказателство, ще получите бонус от **10 точки**, ако направите връзка между него (доказателството) и един резултат, който е доказан на лекции.

Решение: Ето доказателство. Първо забелязваме, че $\forall a \in \mathsf{A}$ е вярно, че $a \in c(a)$, понеже в "$\{b \in \mathsf{A} \,|\, a\mathsf{R}b \wedge b\mathsf{R}a\}$", b взема последователно стойностите на всички елементи от A, а е казано, че R е рефлексивна. Тогава $c(a) \neq \emptyset$ за всяко $a \in \mathsf{A}$. Дотук доказахме, че $\mathcal{F}$ е покриване на A.

Сега ще докажем, че $\mathcal{F}$ е разбиване. Тоест, че $c(a) \neq c(b) \rightarrow c(a) \cap c(b) = \emptyset$, за всички $a, b \in \mathsf{A}$. Ще докажем контрапозитивното съждение:

$$c(a) \cap c(b) \neq \emptyset \rightarrow c(a) = c(b)$$

Разглеждаме произволни a и b от A, такива че $c(a) \cap c(b) \neq \emptyset$. Разглеждаме произволен $d \in c(a) \cap c(b)$. Щом $c(a) \cap c(b)$ е непразно, такъв d съществува. Разглеждаме произволен a_1 от $c(a)$ и произволен b_1 от $c(b)$. Щом $c(a)$ и $c(b)$ са непразни, такива a_1 и b_1 съществуват.

Първо ще покажем, че $a_1 \in c(b)$.

- По дефиниция, $c(a) = \{z \in \mathsf{A} \,|\, a\mathsf{R}z \wedge z\mathsf{R}a\}$. Но $a_1 \in c(a)$. Тогава е вярно, че $a_1\mathsf{R}a$. Знаем, че $d \in c(a)$. Тогава е вярно, че $a\mathsf{R}d$. Щом $a_1\mathsf{R}a$ и $a\mathsf{R}d$ и R е транзитивна, вярно е, че $a_1\mathsf{R}d$. Знаем, че $d \in c(b)$. Тогава е вярно, че $d\mathsf{R}b$. Щом $a_1\mathsf{R}d$ и $d\mathsf{R}b$ и R е транзитивна, вярно е, че $a_1\mathsf{R}b$.
- Щом $d \in c(b)$, вярно е, че $b\mathsf{R}d$. Знаем, че $d \in c(a)$, следователно $d\mathsf{R}a$. От това, че $b\mathsf{R}d$ и $d\mathsf{R}a$ и R е транзитивна следва, че $b\mathsf{R}a$. Знаем, че $a_1 \in c(a)$, така че $a\mathsf{R}a_1$. От това, че $b\mathsf{R}a$ и $a\mathsf{R}a_1$ и R е транзитивна следва, че $b\mathsf{R}a_1$.

Щом $a_1\mathsf{R}b$ и $b\mathsf{R}a_1$, вярно е, че $a_1 \in c(b)$. Но щом произволен елемент от $c(a)$, а именно a_1, е елемент на $c(b)$, вярно е, че $c(a) \subseteq c(b)$.

Напълно аналогично се показва, че $b_1 \in c(a)$. Но щом произволен елемент от $c(b)$, а именно b_1, е елемент на $c(a)$, вярно е, че $c(b) \subseteq c(a)$.

Тогава $c(a) \subseteq c(b)$ и $c(b) \subseteq c(a)$. От аксиомата за обема следва, че $c(a) = c(b)$.

Що се отнася до бонуса, ето връзката с изучаваното на лекции. Ако R е и симетрична, то тя е релация на еквивалентност. При релациите на еквивалентност въведохме нотацията $[a]$ по следния начин:

$$\forall a \in \mathsf{A} : [a] \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathsf{A} \,|\, a\mathsf{R}b\}$$

Забележете, че $c(a)$ е същото като $[a]$, ако релацията е и симетрична, понеже $a\mathsf{R}b$ влече $b\mathsf{R}a$, когато R е симетрична. Ерго, доказаната на лекции теорема, гласяща "фамилията $\{[a] \,|\, a \in \mathsf{A}\}$ е разбиване на A", е частен случай на това, което доказахме за $\mathcal{F}$.

Зад. 6 Нека p, q и a са прости съждения. Разгледайте съждението

$$(\neg p \wedge (p \vee q) \to q) \to a$$

Докажете или опровергайте, че това съждение е тавтология, използвайки само еквивалентни преобразувания. Еквивалентните преобразувания, които можете да ползвате наготово, са тези закони и свойства, които разгледахме в лекцията за съждителна логика.

Решение: В сила са следните еквивалентности

$$\begin{array}{ll}
(\neg p \wedge (p \vee q) \to q) \to a \equiv & \text{(свойство на импликацията)} \\
(\neg(\neg p \wedge (p \vee q)) \vee q) \to a \equiv & \text{(закон на Де Морган)} \\
(\neg\neg p \vee \neg(p \vee q) \vee q) \to a \equiv & \text{(закон за двойното отрицание)} \\
(p \vee \neg(p \vee q) \vee q) \to a \equiv & \text{(комутативност на дизюнкцията)} \\
(\neg(p \vee q) \vee p \vee q) \to a \equiv & \text{(асоциативност на дизюнкцията)} \\
(\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)) \to a \equiv & \text{(свойство на отрицанието)} \\
\mathtt{T} \to a \equiv & \text{(свойство на импликацията)} \\
\neg\mathtt{T} \vee a \equiv & \\
\mathtt{F} \vee a \equiv & \text{(свойство на логическата константа } \mathtt{F}\text{)} \\
a &
\end{array}$$

Показахме, че даденото съставно съждение е еквивалентно на простото съждение a. Но просто съждение не е тавтология – факт, който бе казан на лекции. Тогава и даденото съставно съждение не е тавтология.