Примерни решения на Домашно №2

Задача 1: Представете си кръг D и неговата ограждаща окръжност C. Нека n е цяло положително число. Представете си множество от произволни точки $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ върху C. Нека $s_{i,j}$ е отсечката с краища p_i и p_j. Какъв е максималният брой $f(n)$ на районите, на които може да бъде разделен ("нарязан") кръгът D от отсечките $s_{i,j}$, където $1 \leq i < j \leq n$?

Решение: Нека $S = \{s_{i,j} \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}$. Да разгледаме планарното вписване $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ със следните планарни върхове и планарни ребра.

- $\mathcal{V}$ е множеството от всички пресечни точки на двойки отсечки от S. А именно, това са дадените точки $p_1, \dots, p_n$, както и всички вътрешни пресечни точки на отсечки.
- $\mathcal{E}$ е множеството от
  - дъгите на окръжността спрямо $p_1, \dots, p_n$ и
  - отсечките, които се получават от елементите на S чрез "раздробяването" от вътрешните точки на пресичане. Формално, става дума за максималните подотсечки (на отсечките от S), несъдържащи точки на пресичане.

Очевидно $\mathcal{G}$ е планарно вписване и Ойлеровата формула

$$|\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + f = 2$$

е в сила, където f е броят на лицата. Има една особеност: в задачата се търси броят на районите, на които отсечките разделят кръга, а въпросното планарно вписване съдържа и външното лице, което не принадлежи на кръга. Така че търсим $f - 1$, а не f. Очевидно

$$f - 1 = |\mathcal{E}| - |\mathcal{V}| + 1$$

Да намерим броя на отсечките, тоест, да намерим $|S|$. Всеки две различни точки от P задават точно една отсечка и обратно, така че $|S| = \binom{n}{2}$. В примера с $n = 6$, отсечките наистина са $\binom{6}{2} = 15$.

Да намерим броя на точките на вътрешно пресичане на отсечките. Този брой **не е** $\binom{\binom{n}{2}}{2}$, защото не е вярно, че всеки две различни отсечки дават вътрешна точка на пресичане: някои отсечки се пресичат върху точки от P, а други не се пресичат изобщо. Това е илюстрирано добре от примера с $n = 6$ в пояснението към условието. Ключово наблюдение е, че всеки четири различни точки от P задават точно една вътрешна пресечна точка и обратно, така че броят на вътрешните пресечни точки е $\binom{n}{4}$. В примера с $n = 6$, вътрешните пресечни точки наистина са $\binom{6}{4} = 15$.

Сега да намерим $|\mathcal{V}|$. $\mathcal{V}$ се разбива на P и множеството от вътрешните точки на пресичане. Тогава $|\mathcal{V}| = n + \binom{n}{4}$.

Сега да намерим $|\mathcal{E}|$. Ключово наблюдение е, че по отношение на отсечките от S, всяка вътрешна точка на пресичане на две отсечки поражда две нови планарни ребра (които не присъстват в S), така че при x точки на пресичане, планарните ребра, които биват породени, са $|S| + 2x$ на брой. Вече знаем, че $|S| = \binom{n}{2}$, а вътрешните точки на пресичане са $\binom{n}{4}$, така че отсечките от S пораждат $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$ планарни ребра. В примера с $n = 6$, това са $\binom{6}{2} + 2\binom{6}{4} = 45$ планарни ребра. Нека читателят се убеди, че наистина в илюстрацията в условието с нерегулярно разположените шест точки е вярно, че петнадесетте сини отсечки пораждат точно четиридесет и пет планарни ребра.

Но това не е мощността на $\mathcal{E}$. Елементи на $\mathcal{E}$ са и дъгите на окръжността спрямо точките от P. Тези дъги са n на брой. И така, $|\mathcal{E}| = n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$.

Тогава крайният отговор е

$$f - 1 = n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} - \left(n + \binom{n}{4}\right) + 1 = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

При $n = 6$, това е $1 + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} = 31$.

Задача 2: Разглеждаме обикновени графи. Докажете, че за всеки граф G е вярно, че $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Решение: Оцветяването на върховете на граф с k цвята е същото като разбиването на множеството от върховете му на k антиклики. Нека графът е $G = (V, E)$. Нека $\chi(G) = k$. Тогава съществува разбиване на V на k антиклики, да го наречем $\mathcal{V} = \{S_1, S_2, \dots S_k\}$, където $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, и не съществува разбиване на V на $k - 1$ антиклики. Съобразяваме, че за всеки S_i, S_j, такива че $1 \leq i < j \leq k$, съществува връх $u \in S_i$ и съществува връх $v \in S_j$, такива че u и v са съседи – ако такива върхове няма, можем да обединим S_i и S_j в една антиклика, като по този начин конструираме разбиване на V на $k - 1$ антиклики, в противоречие с извода, че такова разбиване не съществува.

Следователно, в E съдържа поне едно ребро за всеки i, j, такива че $1 \leq i < j \leq k$. Тогава $m \geq \binom{k}{2}$, откъдето

$$
\begin{aligned}
m &\geq \frac{k(k-1)}{2} \leftrightarrow \\
2m &\geq k^2 - k \leftrightarrow \\
k^2 - k - 2m &\leq 0 \leftrightarrow \\
\left(k - \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}\right)\left(k - \frac{1 - \sqrt{1 + 8m}}{2}\right) &\leq 0 \leftrightarrow \\
\left(k - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}\right)\right)\left(k - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}\right)\right) &\leq 0
\end{aligned}
$$

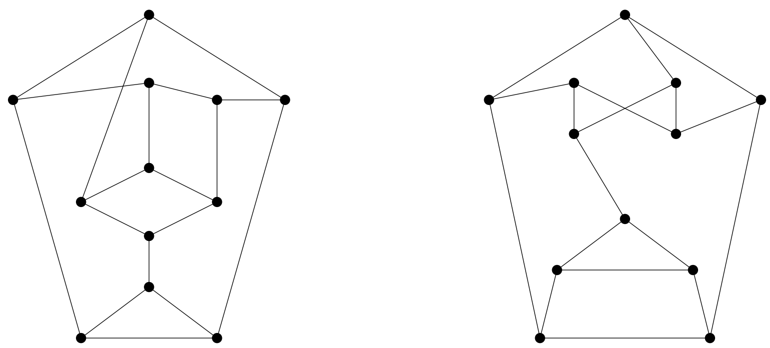
Оттук веднага следва, че

$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

И тъй като $\chi(G) = k$, заключаваме, че

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Задача 3: Докажете или опровергайте, че тези два графа са изоморфни:

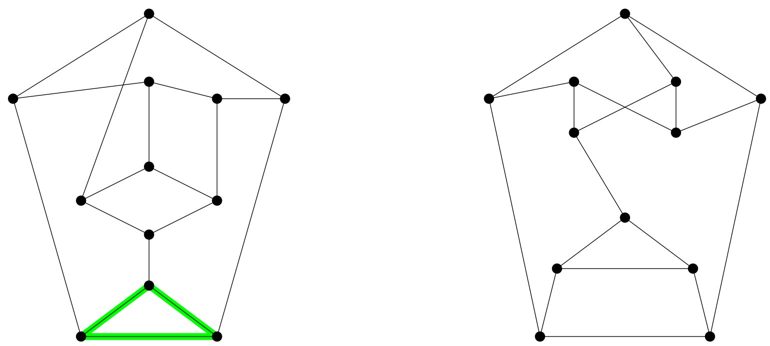


Решение: Тези графи не са изоморфни. Това обаче не е очевидно. И двата имат 12 върха, 18 ребра и са 3-регулярни. Последното означава, че редиците от степените им са

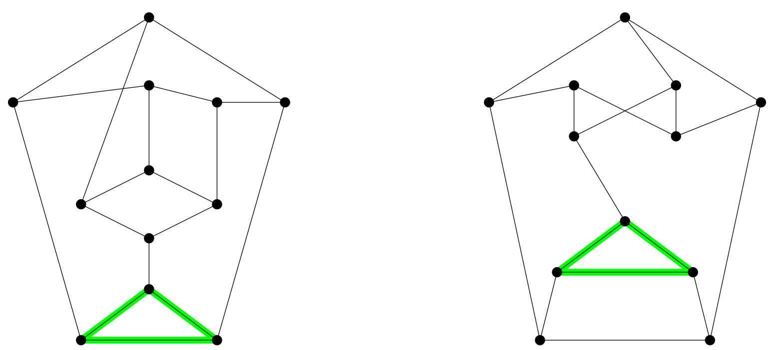
$$3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$$

(Броят на ребрата следва веднага от броя на върховете и 3-регулярността: $12 \times 3 = 2m \ \rightarrow \ m = 18$). Броят на биекциите между множествата от върховете е $12! = 479\,001\,600$, което прави проверяване с пълно изчерпване безнадеждно, ако се работи на ръка. Ще докажем, че няма изоморфизъм, разглеждайки най-късите цикли в двата графа.

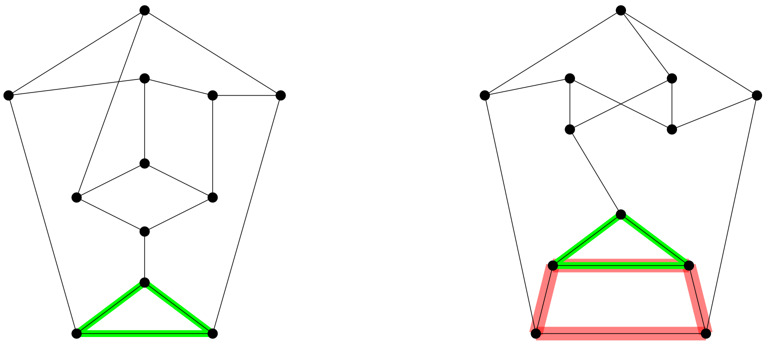
Лесно се вижда, че графът вляво има точно един 3-цикъл:



Графът вдясно също има точно един 3-цикъл, което също е очевидно:



Дотук нямаме опровержение на хипотезата, че са изоморфни. За да бъдат изоморфни обаче, трябва изоморфизмът да изобразява трите върха на единия 3-цикъл в трите върха на другия 2-цикъл. Това са вече само 3! = 6 възможности. Ние обаче ще си спестим усилието дори за тези шест изчерпателни проверки, правейки наблюдението, че точно едно ребро от 3-цикъла в графа вдясно е и ребро от 4-цикъл:



Може да гледаме на обединението на тези два цикъла (в графа вдясно) като на един 5-цикъл плюс ребро, което не е от 5-цикъла, но чиито краища са в него. Такова ребро се нарича *хорда*.

Ключово наблюдение е, че графът вляво няма подграф с такава форма, а именно 5-цикъл с хорда. За да се убедим в това, достатъчно е да разгледаме всяко от ребрата на 3-цикъла вляво и да отбележим, че то не е ребро от 4-цикъл.

Задача 4: Първо една дефиниция. За всяка редица от цели положителни числа $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, казваме, че s е *дървесна*, ако

- $n \geq 2$ и
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : d_i \leq d_{i+1}$ и
- съществува дърво, чиято редица от степените е s.

Примерно, $(1, 1, 1, 3)$ е дървесна редица и $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)$ е дървесна редица. От друга страна, $(2, 2, 2)$ не е дървесна редица. Докажете, че s е дървесна редица тогава и само тогава, когато $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Решение: Първо ще направим още една дефиниция, която позволява краткост и яснота в доказателството. Ще казваме, че редица от цели положителни числа $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ е *специална*, ако $n \geq 2$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : d_i \leq d_{i+1}$ и $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Това, което трябва да се докаже е, че редица е дървесна тстк е специална.

В едната посока, нека $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ е дървесна. Тогава съществува дърво $T = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E_T)$, такова че $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : d(v_i) = d_i$. Знаем, че за всеки граф $G = (V, E)$ изпълнено

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Но T е граф, така че за него в частност е изпълнено

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E_T|$$

Тъй като $d(v_i) = d_i$ за $1 \leq i \leq n$, в сила е

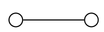
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E_T|$$

Знаем, че щом T е дърво, в сила е $|E_T| = n - 1$. Заключаваме, че

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$$

От това следва, че s е специална.

В другата посока доказателството е по-триково. Нека $s = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ е специална. Ще докажем с индукция по n, че съществува дърво, чиято редица от степените се явява s.

Базата е $n = 2$. Щом s е специална, сумата от елементите ѝ е $2 \times 2 - 2 = 2$. Има една единствена такава редица и тя е $(1, 1)$. Тази редица е дървесна, понеже се явява редицата от степените на това дърво (като неименуван граф):  .

Да допуснем, че всяка специална редица с дължина n е дървесна. Да разгледаме произволна специална редица с дължина $n + 1$. Нека тази редица е $s = (d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1})$. Щом е специална, $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2(n + 1) - 2 = 2n$. Очевидно е, че

- s съдържа поне една единица, в противен случай сумата от елементите ѝ би била поне $2n + 2$,
- s съдържа поне един елемент, по-голям от единица, в противен случай сумата от елементите ѝ би била $n + 1$.

Тогава $d_1 = 1$. Нека k е минималният индекс, такъв че $d_k > 1$. От току-що направеното наблюдение следва, че такъв съществува. Очевидно $k > 1$. Да разгледаме редицата

$$t = (d_2, \dots, d_{k-1}, d_k - 1, d_{k+1}, \dots, d_{n+1})$$

На прост български, t се получава от s с изтриване на първия елемент d_1 и декрементиране на d_k с единица. Твърдим, че t е специална. Наистина, дължината ѝ е поне 2, елементите ѝ са в ненамаляващ ред и тяхната сума е точно $2n - 2$, понеже тя е по-малка с 2 от сумата на елементите на s заради изтриването на d_1 и декрементирането на d_k.

Удобно е да дефинираме числата $h_1, \dots, h_n$ така:

$$\begin{aligned}
&h_1 = d_2, h_2 = d_3, \dots, h_{k-2} = d_{k-1}\\
&h_{k-1} = d_k - 1\\
&h_k = d_{k+1}, h_{k+1} = d_{k+2}, \dots, h_n = d_{n+1}
\end{aligned}$$

Изразена в тези числа, t става $t = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Щом t е специална редица с дължина n, от индуктивното предположение знаем, че тя е дървесна. Тогава съществува дърво $T = (\{v_1, \dots, v_n\}, E_T)$, такова че $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = h_i$. Нека z е връх, който не е връх в T (тоест, $z \notin \{v_1, \dots, v_n\}$). Да разгледаме графа

$$T' = (\{v_1, \dots, v_n, z\}, E_T \cup \{(z, h_{k-1})\})$$

Но T' е дърво съгласно индуктивната дефиниция на "дърво" и еквивалентността на двете дефиниции на "дърво".

Забелязваме, че степента на z в T' е едно, а степента на v_{k-1} в T' е с единица по-голяма от степента на този връх в T; щом степента на v_{k-1} в T е h_{k-1}, то неговата степен в T' е d_k. Но тогава s е точно редицата от степените на T'. Тогава s е дървесна.