

## РЕЛАЦИИ

---

Казвайки “релация” без допълнителни уточнения, имаме предвид релация от вида  $R \subseteq A \times A$ . Когато казваме “крайна релация”, имаме предвид, че множеството е крайно. Казвайки “релация над  $A$ ”, имаме предвид, че  $A$  е въпросното множество. Казвайки “релация над декартовия квадрат  $A \times A$ ” имаме предвид същото нещо, а именно, че  $R \subseteq A \times A$ ; а **не** че  $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ . Фактът, че  $a \in A$  и  $b \in A$  са в релация бележим с “ $(a, b) \in R$ ” или с по-краткия запис “ $aRb$ ”.

**Определение 1.** Нека  $R$  е релация над  $A$ . Нека домейните за  $a$ ,  $b$  и  $c$  са  $A$ .

- $R$  е рефлексивна, ако  $\forall a(aRa)$ .
- $R$  е антирефлексивна, ако  $\forall a(\neg aRa)$ .
- $R$  е симетрична, ако  $\forall a\forall b(aRb \rightarrow bRa)$ .
- $R$  е антисиметрична, ако  $\forall a\forall b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ .
- $R$  е силно антисиметрична, ако  $\forall a\forall b(a \neq b \rightarrow ((aRb \wedge \neg bRa) \vee \neg(aRb \wedge bRa)))$ .
- $R$  е транзитивна, ако  $\forall a\forall b\forall c(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$ .

Когато се каже, изследвайте релацията  $R$  за шестте свойства, се разбира следното: за всяко от шестте изброени горе свойства, да се определи дали  $R$  притежава това свойство, или не.  $\square$

Дадена крайна релация може да се опише в явен вид по три начина. Може да се изброят в явен вид наредените двойки, които ѝ принадлежат, може да се състави матрицата ѝ (което е същото нещо, написано по-кратко и прегледно), и може да се нарисува графът ѝ.

**Зад. 1** Нека  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$ . Опишете в явен вид релацията  $R$  и по трите начина, ако  $R$  е дефинирана така: за всеки  $a$  и  $b$  от  $A$ ,  $aRb$  тогава и само тогава, когато

1.  $a = b$
2.  $a \neq b$
3.  $a + b = 2$
4.  $a * b = 2$
5.  $\exists k \in \mathbb{N}(a + b = 2k)$
6.  $a$  дели  $b$

7.  $a$  и  $b$  са взаимно прости<sup>†</sup>

**Решение:** Ще решим 5. Преведено на естествен език, условието казва, че всеки два елемента са в релация тогава и само тогава, когато сумата им е четно (неотрицателно) число.

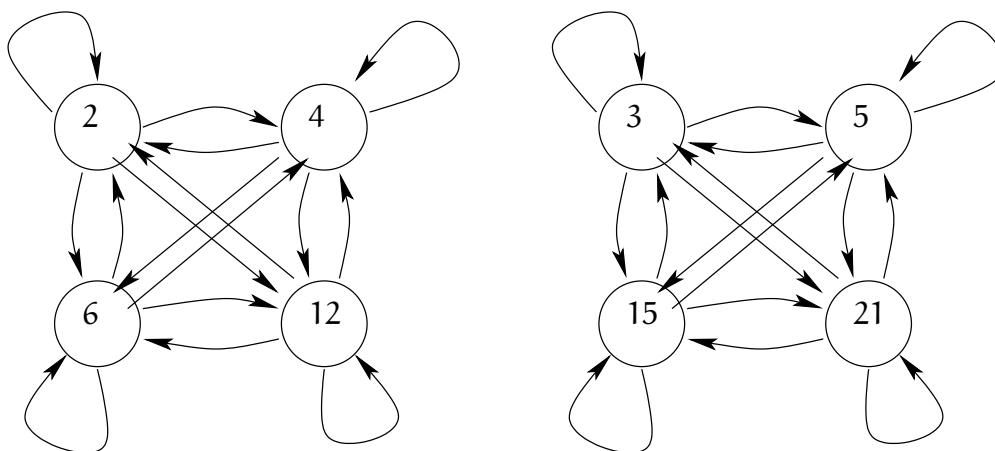
**Първи начин**

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (3, 3), (3, 5), (3, 15), (3, 21), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 12), (5, 3), (5, 5), (5, 15), (5, 21), (6, 2), (6, 4), (6, 12), (12, 2), (12, 4), (12, 6), (12, 12), (15, 3), (15, 5), (15, 15), (15, 21), (21, 3), (21, 5), (21, 15), (21, 21)\}$$

**Втори начин** (нулите не са написани)

	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1		1		1	1		
3		1		1			1	1
4	1		1		1	1		
5		1		1			1	1
6	1		1		1	1		
12	1		1		1	1		
15		1		1			1	1
21		1		1			1	1

**Трети начин**



<sup>†</sup> Две естествени числа  $m$  и  $n$ , такива че  $m \geq 2$  и  $n \geq 2$ , са *взаимно прости*, ако единственото цяло положително число, което ги дели и двете, е единицата.

**Зад. 2** За всяка от релациите от предната задача, изследвайте релацията за шестте свойства.

**Решение:** Ще изследваме 7.

- Релацията не е рефлексивна, понеже всяко от числата е различно от 1 и се дели на себе си.
- Релацията е антирефлексивна – по същата причина, а именно, че никое от числата не е взаимно просто със себе си.
- Релацията е симетрична, тъй като за всяко цяло положително число  $k$ , това число или е общ делител на две числа  $m$  и  $n$ , или не е. Дали казваме “на  $m$  и  $n$ ” или “на  $n$  и  $m$ ”, няма значение.

По-формално можем да кажем същото нещо така. Нека  $Q(m, n, k)$  е триместен предикат, в който домейните на първата и втората променлива са  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , а на третата променлива е  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  (тоест  $\mathbb{N}^+$ ). Нека  $Q(m, n, k)$  е истина тогава и само тогава, когато  $k$  е общ делител на  $m$  и  $n$ . Нека  $P(m, n)$  е предикатът “ $m$  и  $n$  са взаимно прости” с домейни  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Предикатът  $P(m, n)$  можем да изразим така:

$$P(m, n) : \quad \forall k(Q(m, n, k) \rightarrow k = 1)$$

Тъй като  $\forall m \forall n \forall k(Q(m, n, k) \leftrightarrow Q(n, m, k))$ , то релацията е симетрична.

- Релацията не е антисиметрична, понеже можем да посочим поне две числа  $x$  и  $y$  от дадените, такива че  $xRy$  и  $yRx$ , примерно 2 и 4.
- Релацията не е силно антисиметрична, понеже е симетрична (симетричността и силната антисиметричност са несъвместими).
- Релацията не е транзитивна. Като контрапример: 6 и 5 са взаимно прости, 5 и 21 са взаимно прости, но 6 и 21 не са (имат общ делител 3).

**Определение 2.** Нека  $R \subseteq A \times B$  е двуместна релация. Обратната релация на  $R$  е релацията  $R^{-1} = \{(a, b) \mid a \in B \wedge b \in A \wedge (b, a) \in R\}$ . Релацията-допълнение на  $R$  е релацията  $\bar{R} = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge (a, b) \notin R\}$ .  $\square$

**Зад. 3** Напишете всички елементи на релацията  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , дефинирана така:  $R = \{(a, b, c) \mid 0 < a < b < c < 5\}$ .

**Зад. 4** За всяка от следните дефиниции на релацията  $R \subseteq A \times B$ , намерете  $R^{-1}$  и  $\bar{R}$ . Символът “ $\mathbb{R}$ ” означава множеството от реалните числа.

1.  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \mid a < b\}$ .
2.  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$ .
3.  $A$  е множеството от държавите в Европа.  $B$  също е множеството от държавите в Европа.  $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат обща граница}\}$ .

**Зад. 5** Нека  $M$  е матрицата на някаква релация  $R \subseteq A \times A$ . Нека  $A$  е крайно множество с  $n$  елемента. Нека  $M$  има точно  $k$  единици. Нека  $M'$  и  $M''$  са съответно матриците на  $R^{-1}$  и  $\bar{R}$ . Колко единици има в  $M'$ ? Колко единици има в  $M''$ ?

**Зад. 6** Нека  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $B = \{1, 2, 3\}$ . Нека  $R_1 \subseteq A \times B$  и  $R_2 \subseteq A \times B$  са такива, че  $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  и  $R_2 = \{(1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ . Намерете

- а)  $R_1 \cup R_2$    б)  $R_1 \cap R_2$    в)  $R_1 \setminus R_2$    г)  $R_2 \setminus R_1$    д)  $(R_1 \setminus R_2) \times (A \times B)$

**Зад. 7** Нека  $A$  е множеството от студентите в някакъв университет. Нека  $B$  е множеството от книгите в библиотеката на университета. Нека  $R \subseteq A \times B$  и  $R_2 \subseteq A \times B$  са съответно релациите:

$R_1 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ трябва да прочете книга } b\}$

$R_2 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ е чел книга } b, \text{ която е трябвало да прочете}\}$

Опишете следните релации

- а)  $R_1 \cup R_2$    б)  $R_1 \cap R_2$    в)  $R_1 \oplus R_2$    г)  $R_1 \setminus R_2$    д)  $R_2 \setminus R_1$

**Зад. 8** Нека  $R_{>} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$ . Нека релациите  $R_{\geq}, R_{<}, R_{\leq}, R_{=}, R_{\neq}$  са аналогичните релации с очевидния смисъл на индексите. Опишете колкото е възможно по-просто и естествено следните релации:

- а)  $R_{>} \cup R_{<}$    б)  $R_{>} \cup R_{=}$    в)  $R_{\geq} \cap R_{\leq}$    г)  $R_{>} \setminus R_{\geq}$    д)  $R_{\geq} \setminus R_{>}$   
 е)  $R_{<} \cup R_{=}$    ж)  $R_{>} \oplus R_{<}$    з)  $R_{>} \oplus R_{\leq}$    и)  $R_{\geq} \cup R_{\leq}$    й)  $R_{<} \cup R_{\neq}$   
 к)  $R_{<} \cap R_{\neq}$    л)  $R_{\leq} \cap R_{\neq}$    м)  $R_{\leq} \setminus R_{\neq}$    н)  $R_{\neq} \setminus R_{\leq}$    о)  $R_{\geq} \oplus R_{\neq}$    п)  $R_{<} \oplus R_{=}$

**Зад. 9** Напишете в явен вид (примерно, нарисувайки графа на релацията) всички релации над триелементно множество, които са антирефлексивни, антисиметрични и не са транзитивни.

**Зад. 10(\*)** Колко релации  $R \subseteq A \times A$ , където  $A$  е крайно множество с  $n$  елемента, са:

1. рефлексивни?
2. антирефлексивни?
3. симетрични?
4. антисиметрични?
5. силно антисиметрични?
6. симетрични и антисиметрични?

7. симетрични и силно антисиметрични?
8. симетрични и рефлексивни?
9. антисиметрични и нито рефлексивни, нито антирефлексивни?
10. антисиметрични и силно антисиметрични?

**Зад. 11** Колко транзитивни релации има над  $n$  елементно множество, ако

1.  $n = 1$
2.  $n = 2$
3. (\*)  $n = 3$

**Зад. 12** Нека  $A$  и  $B$  са крайни множества. Нека  $A$  има точно три елемента. Колко елемента има  $B$ , ако е известно, че има точно 4096 релации от вида  $R \subseteq A \times B$ ?

*Упътване:*  $4096 = 2^{12}$ .

**Зад. 13** Следната теорема е невярна. Следователно, в “доказателството” ѝ има грешка/грешки. Открийте каква е грешката/какви са грешките в това “доказателство”.

**Теорема 1 (погрешна теорема).** Нека  $R$  е произволна релация над множество  $A$ . Нека  $R$  е симетрична и транзитивна. Тогава  $R$  е рефлексивна.

#### Доказателство

Разглеждаме произволен  $a \in A$ . Нека  $b$  е произволен елемент от  $A$ , такъв че  $aRb$ . Тъй като  $R$  е симетрична, заключаваме, че  $bRa$ . Тъй като  $R$  е транзитивна и вече имаме  $aRb \wedge bRa$ , заключаваме, че  $aRa$ . Доказахме за произволен елемент, че той е в релация със себе си.  $\square$

**Зад. 14** Докажете за произволна релация  $R$ , че  $R$  е симетрична тогава и само тогава, когато  $R = R^{-1}$ .

**Зад. 15** Докажете за произволна релация  $R \subseteq A \times A$ , че  $R$  е антисиметрична тогава и само тогава, когато  $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$ .

**Зад. 16** Нека  $S$  е множеството от всички релации над  $I_5$ . Нека  $R \subseteq S \times S$  е релация, дефинирана така:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат един и същи брой елементи}\}$$

Докажете, че  $R$  е релация на еквивалентност. Колко класа на еквивалентност има  $R$ ?

**Зад. 17** Нека за всяко естествено число  $n$ ,  $J_n$  е множеството  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Нека  $A = \{2^n \mid n \in J_5\}$ . Нека  $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$  е релация, дефинирана така:

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid ac = bd \vee ad = bc\}$$

Колко елемента има  $R$ ? Напишете в явен вид  $R$  чрез матрицата ѝ. Докажете, че  $R$  е релация на еквивалентност. Кои са класовете на еквивалентност на  $R$ ?

**Зад. 18** Нека  $A = \{a, b, c, d\}$ . Нека  $R \subseteq A \times A$  е релацията

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

Определете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на  $R$ .

**Зад. 18** Нека  $A = \{a, b, c, d\}$ . Нека  $R \subseteq A \times A$  и  $R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$ . Определете минималната по брой елементи релация  $S \subseteq A \times A$ , такава че  $R \cup S$  е релация на еквивалентност.

*Решение:*

$$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}.$$

□

**Зад. 19** Нека  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Нека  $S \subseteq A \times A$  и  $S = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ . Определете минималната по мощност релация  $T \subseteq A \times A$ , такава че  $S \cup T$  е релация на еквивалентност.

**Зад. 20** Нека  $R$  и  $S$  са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако  $R$  и  $S$  са транзитивни, то  $R \Delta S$  е транзитивна.

*Решение:*

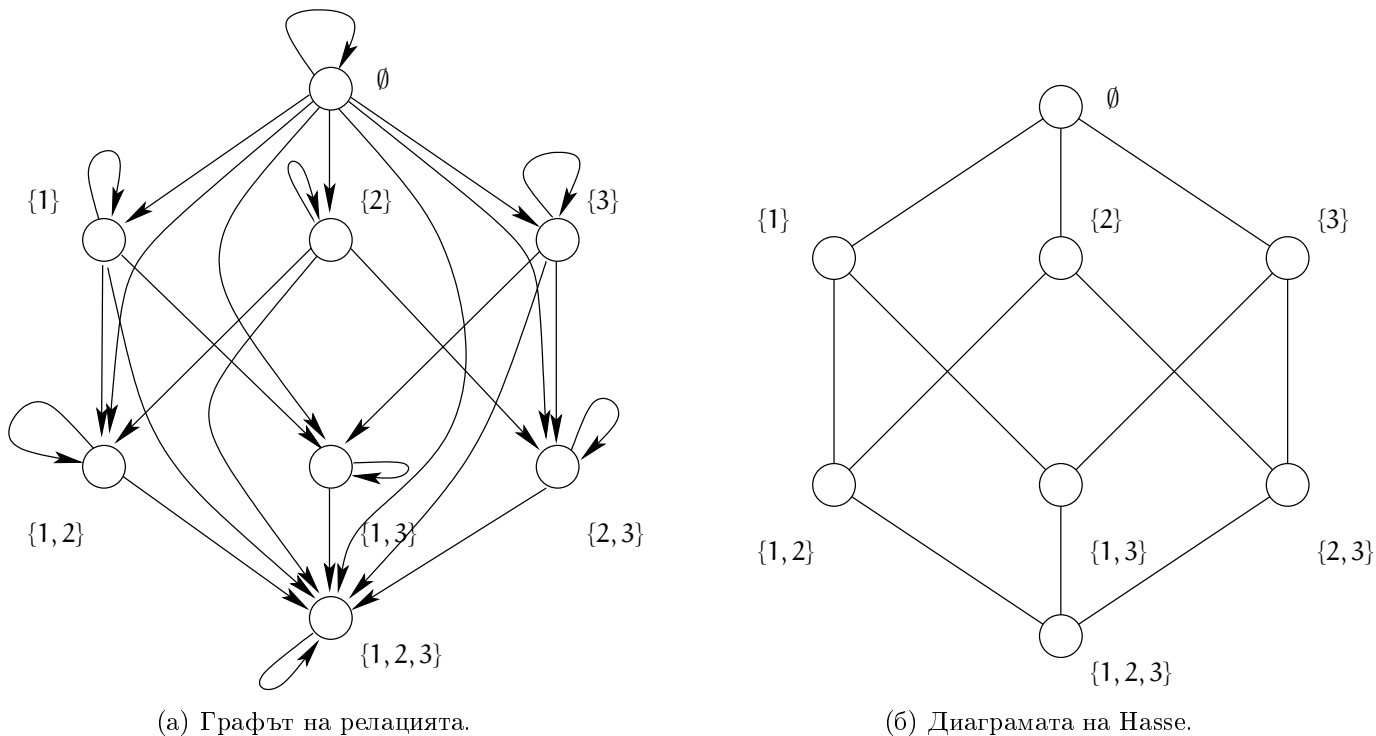
Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека  $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$  и  $S = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$ . Очевидно и двете релации са транзитивни. Но  $R \Delta S = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$  не е транзитивна – за да бъде транзитивна, трябва да съдържа  $(a, d)$ . □

**Зад. 21** Нека  $Q$  и  $T$  са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако  $T$  е антисиметрична, а  $Q$  е силно антисиметрична, то  $\overline{T \setminus Q}$  е антисиметрична.

*Решение:*

Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека  $T = \{(a, b)\}$  и  $Q = \{(a, b)\}$ . Очевидно и двете са антисиметрични. Очевидно  $Q$  е силно антисиметрична. Но  $\overline{T \setminus Q} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ , която релация не е антисиметрична, тъй като съдържа  $(a, b)$  и  $(b, a)$ . □

**Определение 3.** Релация на частична наредба  $R \subseteq A \times A$  е всяка релация, която е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. В контекста на частичните наредби, за всяко  $a \in A$  и всяко  $b \in A$ ,  $a$  и  $b$  са сравними, ако поне едно от  $aRb$  и  $bRa$  е изпълнено, и са несравними в противен случай. Диаграма на Хасе е начин за графично представяне на крайни частични наредби, при който се рисува част от графа на релацията:



Фигура 1: Графът и диаграмата на Хасе на релацията  $R_{\subseteq A}$  с множество  $A = \{1, 2, 3\}$ .

- не се рисуват примките – тъй като релацията е рефлексивна, те се подразбират;
- не се рисуват ребра от вида  $(a, c)$ , ако вече  $(a, b)$  и  $(b, c)$  присъстват – тъй като релацията е транзитивна, те се подразбират;
- елементите се рисуват на ясно обособени нива, примерно минималните отгоре, техните непосредствени съседни на следващото ниво и т. н. Поради това не се слагат посоки на ребрата, тъй като посоките се подразбират; ако започнем с минималните елементи отгоре и разполагаме другите надолу, посоките на ребрата са отгоре надолу.

□

Като пример вижте релацията  $R_{\subseteq A}$  с множество  $A = \{1, 2, 3\}$ , изобразена на Фигура 1 веднъж с граф и веднъж с диаграма на Хасе. Очевидно, диаграмата на Хасе е много по-прегледна, тъй като показва същността на релацията без нищо излишно.

**Зад. 22** Нека  $A = \{a, b, c, d\}$ . Определете в явен вид всички релации на частична наредба над  $A$ , в които  $a$  и  $b$  са минимални, а  $c$  и  $d$  не са сравними.

*Решение:*

Въпросните релации са 16. За да се убедим в това, да разгледаме матриците им. Всяка от тези матрици има единици по главния диагонал, тъй като релациите са рефлексивни (Фигура 2).

Освен това, има нули в колоните на  $a$  и  $b$  (с изключение на клетките от главния диагонал), тъй като  $a$  и  $b$  са минимални (Фигура 3).

	a	b	c	d
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

Фигура 2: Релациите са рефлексивни.

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	
d	0	0		1

Фигура 3: **a** и **b** са минимални.

Освен това, има нули в клетките **(c, d)** и **(d, c)**, тъй като **c** и **d** не са сравними (Фигура 4).

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

Фигура 4: **c** и **d** не са сравними.

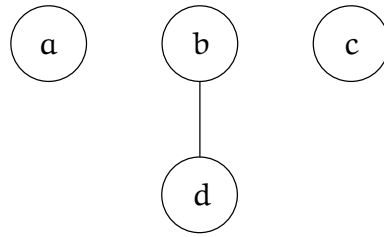
Останалите 4 клетки могат да бъдат запълнени с нули и единици по  $2^4 = 16$  различни начина, всеки от които съответства на една от търсените релации:

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

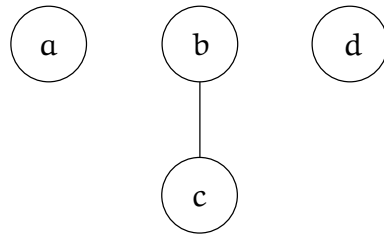




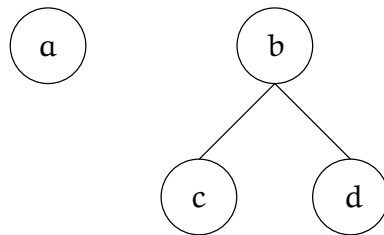
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



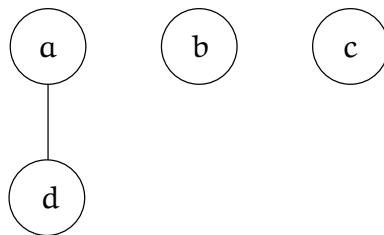
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



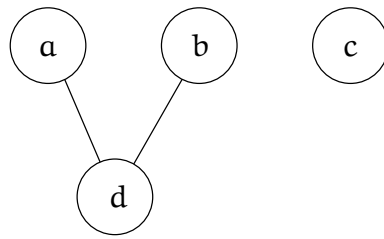
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



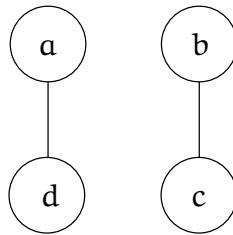
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



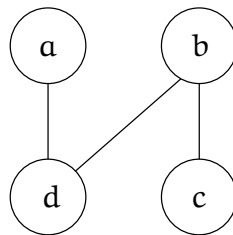
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



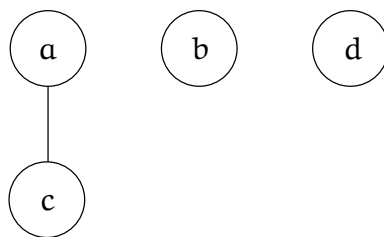
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



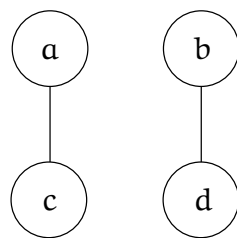
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



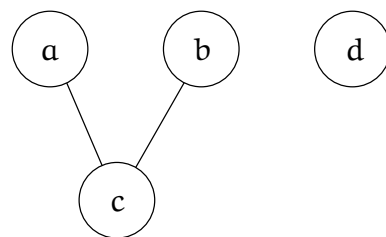
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



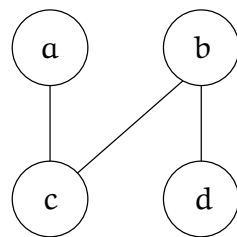
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



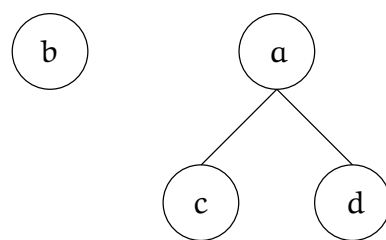
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



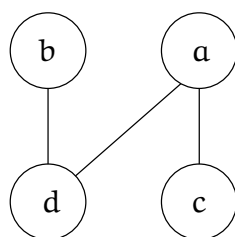
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



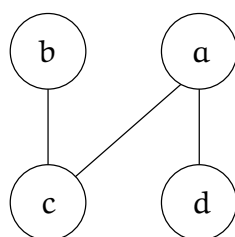
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



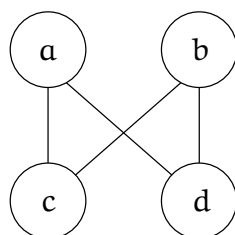
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



□

Определение 4, **Задача А**, **Задача Б** и **Задача В** са материал **извън** материала за курса и са предназначени за студенти със специален интерес към дискретната математика.

**Определение 4** (композиция на релация със себе си). Нека  $R$  е релация над множество  $A$ . Релацията  $R \circ R$  дефинираме така:

$$R \circ R = \{(a, b) \mid \exists c \in A (aRc \wedge cRb)\}$$

Степените на релацията  $R$  дефинираме така:

$$R^1 = R$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : R^{n+1} = R^n \circ R$$

Релациите  $R^1 = R, R^2, R^3$  и т. н. се наричат степените на  $R$ .

**Зад. А** Нека  $R \subseteq I_4 \times I_4$  е дефинирана така:  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ . Намерете  $R^n$  за  $n \in \mathbb{N}^+$ .

**Решение:** Лесно се съобразява, че

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

Тъй като  $R^4 = R^3$ , очевидно че  $R^5 = R^4$ ,  $R^6 = R^5$ , и т. н. Следователно,

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > 4 \rightarrow R^n = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\})$$

□

**Зад. Б** Докажете, че за всяка релация  $A \subseteq A \times A$ ,  $R$  е транзитивна тогава и само тогава, когато  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ .

**Решение, част I:** Нека  $R$  е транзитивна.

Ще докажем по индукция, че  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ . Базата е за  $n = 1$ : очевидно,  $R^1 \subseteq R$ . Да допуснем, че  $R^n \subseteq R$ . Ще докажем, че  $R^{n+1} \subseteq R$ . Да разгледаме произволен елемент  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Съгласно Определение 4,  $\exists x \in A ((a, x) \in R^n \wedge (x, b) \in R)$ . От индуктивната хипотеза знаем, че  $R^n \subseteq R$ . Следователно,  $(a, x) \in R$ . Щом  $(a, x) \in R$  и  $(x, b) \in R$ , то  $(a, b) \in R$ , тъй като  $R$  е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в  $R^{n+1}$ , то той е и в  $R$ .

**Решение, част II:** Нека  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ .

Ще докажем, че  $R$  е транзитивна. Тъй като  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ , в частност  $R^2 \subseteq R$ . Да разгледаме произволни елементи от  $A$ , да ги наречем  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Нека  $(a, b) \in R$  и  $(b, c) \in R$ . Съгласно Определение 4, изпълнено е  $(a, c) \in R^2$ . Но  $R^2 \subseteq R$ . Следователно,  $(a, c) \in R$ . □

**Зад. В** Докажете, че за всяка релация  $A \subseteq A \times A$ , ако  $R$  е рефлексивна и транзитивна, то  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n = R)$ .