Асимптотични нотации

Опр. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично неотрицателна, ако $\exists n_0 \forall n_{n \geq n_0} f(n) \geq 0$.

f е асимптотично положителна, ако $\exists n_0 \forall n_{n \geq n_0} f(n) > 0$.

Асимптотични нотации

Опр. Нека $g(n)$ е ф-я.

$$O(g(n)) \stackrel{def}{=} \{ f(n) \mid \exists c_{c>0} \exists n_0 \forall n_{n \geq n_0} \; 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \}$$

Асимптотични нотации

$$\Omega(g(n)) \stackrel{def}{=} \{ f(n) \mid \exists c_{c>0}\, \exists n_0\, \forall n_{n \geq n_0}\; 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \}$$

Асимптотични нотации

$$o(g(n)) \stackrel{def}{=} \{ f(n) \mid \forall c_{c>0}\, \exists n_0\, \forall n_{n \geq n_0}\ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \}$$

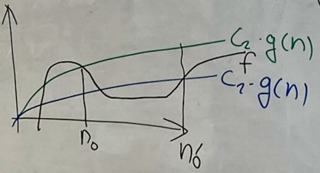
$$\omega(g(n)) \stackrel{def}{=} \{ f(n) \mid \forall c_{c>0}\, \exists n_0\, \forall n_{n \geq n_0}\ 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \}$$

2

Асимптотични нотации

$$\Theta(g(n)) \overset{def}{=} \left\{ f(n) \;\middle|\; \exists c_{1\,c_1>0}\ \exists c_{2\,c_2>0}\ \exists n_0\ \forall n_{n \geq n_0}\quad 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \right\}$$

$$\overset{\text{защо?}}{=} O(g(n)) \cap \Omega(g(n)).$$



Асимптотични нотации

Опр. $f(n)$ и $g(n)$ са ф-ии.

$f(n) \preceq g(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(n) = O(g(n))$ (Вместо $f(n) \in O(g(n))$)

$f(n) \succeq g(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(n) = \Omega(g(n))$

$f(n) \prec g(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(n) = o(g(n))$

$f(n) \succ g(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(n) = \omega(g(n))$

$f(n) \asymp g(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(n) = \Theta(g(n))$.

Асимптотични нотации

Зад. 1 $f(n)$, $g(n)$ и $h(n)$ са ф-ии и $h(n) \prec g(n)$, и $f(n) = g(n) + h(n)$. ДСД, че $f(n) \asymp g(n)$.

Реш. Трябва да док., че $f(n) \preceq g(n)$ & $f(n) \succeq g(n)$.

I $f(n) \preceq g(n)$: $h(n) \prec g(n)$ озн. $\forall c_{c>0} \exists n_0 \forall n_{n \geq n_0}\ 0 \leq h(n) < c \cdot g(n)$

Нека $c \stackrel{def}{=} 1$ (работи заради „$\forall$") Нека n_0 е такова, че $\forall n_{n \geq n_0}\ 0 \leq h(n) < 1 \cdot g(n)$. Тогава $\forall n_{n \geq n_0}\ f(n) < g(n) + g(n) = 2 \cdot g(n)$

Значи $\exists c_{c>0} \exists n_0 \forall n_{\geq n_0}\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$.

$f(n) = g(n) + h(n)$ & $h(n) \prec g(n) \longrightarrow f(n) \asymp g(n)$.

II $f(n) \succcurlyeq g(n)$:

$f(n)$, $g(n)$ и $h(n)$ са асимп. неотр., т.е.

- $\exists n_0^f \forall n_{n \geq n_0^f}\ f(n) \geq 0$
- $\exists n_0^g \forall n_{n \geq n_0^g}\ g(n) \geq 0$
- $\exists n_0^h \forall n_{n \geq n_0^h}\ h(n) \geq 0$

Нека n_0^f, n_0^g и n_0^h са такива. Нека $n_0 \stackrel{def}{=} \max\{n_0^f, n_0^g, n_0^h\}$.

Тогава $\forall n_{n \geq n_0}\ f(n) > 1 g(n)$. Значи

$$\exists c_{c>0} \exists n_0 \forall n_{n \geq n_0}\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

Св-во 1 $f(n) \prec g(n) \longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$f(n) \succ g(n) \longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Св-во 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \longrightarrow f(n) \asymp g(n)$

Обратната посока не е вярна:

$f(n) = (2+\sin n)n,\ g(n) = n$

Св-во 3 $f(n), g(n)$ - ф-ии, $k \in \mathbb{R}^+$

$$f(n) \asymp g(n) \longleftrightarrow (f(n))^k \asymp (g(n))^k$$

Св-во 4 $f(n)$ и $g(n)$ са растящи и неограничени, а $a > 1$ е конст. Тогава

$$f(n) < g(n) \longrightarrow a^{f(n)} < a^{g(n)}$$

$f(n)$ е растяща:
$\exists n_0 \forall n \forall m_{n_0 \le n < m}$
$f(n) \le f(m)$

$\lg n = \log_2 n, \quad \log_a n = \dfrac{\lg n}{\lg a} = \dfrac{1}{\lg a} \cdot \lg n \asymp \lg n$

⚠ <u>Св-во 4</u> $f(n)$ и $g(n)$ са растящи и неограничени, а $a > 1$ е конст. Тогава

$$\lg f(n) \prec \lg g(n) \longrightarrow f(n) \prec g(n).$$

Зад. 2 ДСД, че $2^{\sqrt{2\lg n}} \prec n$

Реш. Нека $f_1(n) \overset{def}{=} 2^{\sqrt{2\lg n}}$, а $f_2(n) \overset{def}{=} n$.

$f_1(n)$ и $f_2(n)$ са раст. и неогр.

$$\lg f_1(n) = \lg 2^{\sqrt{2\lg n}} = \sqrt{2\lg n}\,\lg 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\lg n} \asymp \sqrt{\lg n}$$

$$\lg f_2(n) = \lg n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg f_1(n)}{\lg f_2(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\lg n}}{\lg n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lg n}} = 0 \to \lg f_1(n) \prec \lg f_2(n)$$

$$\to f_1(n) \prec f_2(n).$$

<u>Св-во 5</u> $f(n)$ и $g(n)$ са раст. и неогр., а $a > 1$ е конст. Тогава

$$a^{f(n)} \asymp a^{g(n)} \longrightarrow f(n) \asymp g(n)$$

⚠ <u>Св-во 5'</u> ——||——

$$f(n) \asymp g(n) \longrightarrow \lg f(n) \asymp \lg g(n).$$

<u>Пр.</u>: $\lg \binom{n}{5} \asymp \lg n^5 \asymp \lg n$

Зад. 3 Нека $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k$ е полином от степен k с $a_0 > 0$.

ДСД, че $p(n) \asymp n^k$.

Реш.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \Big(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{n}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_k}{n^k}}_{\to 0} \Big) = a_0 > 0$$

$$\rightarrow p(n) \asymp n^k$$

Зад. 4 Нека $k \in \mathbb{N}$. **ДСД**, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$.

Реш. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{n^k} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\; n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^k}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{k!\,\cancel{n^k}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{k!} = \dfrac{1}{k!} > 0 \longrightarrow \binom{n}{k} \asymp n^k$

Зад. 5 ДСД, че $(n+1)^n \asymp n^n$

Реш. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 0 \longrightarrow$

$(n+1)^n \asymp n^n$