Задачи върху МПД и най-къс път в граф I част.

Задача 1. Даден е тегловен граф с множество от върховете $\{1, 2, \ldots, n\}$, като теглото на всяко ребро е положително цяло число. Дадено е още положително цяло число $k < n$. Върховете $1, 2, \ldots, k$ наричаме *интересни*. Да се състави двойка алгоритми, първият от които извършва предварителна обработка, а вторият отговаря на заявки от вида: ако $i \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}$ е произволен връх, каква е дължината на най-близкия до i интересен връх?

Задача 2. Дадени са n 3-мерни кутии $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Кутията b_i се характеризира с наредената тройка (ℓ_i, w_i, h_i) от своите дължина, ширина и височина. Кутията b_i се побира в кутията b_j, ако има такава пермутация π на мултимножеството $\{\ell_j, w_j, h_j\}_M$, че $\ell_i < \pi(\ell_j)$, $w_i < \pi(w_j)$ и $h_i < \pi(h_j)$. Неформално казано, b_i се побира в b_j, ако b_i може да се завърти така, че да влезе в b_j. Редицата от кутии $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ е *интересна*, ако b_{i_p} влиза в $b_{i_{p+1}}$ за всяко $1 \leq p < k$. Да се състави алгоритъм, който за време $O(n^2)$ изчислява дължината на най-дългата интересна редица от кутии.

Задача 3. Дадени са n различни точки $p_1, p_2, \ldots, p_n$ в равнината. Точката p_i се характеризира с наредената двойка (x_i, y_i) от координатите си. Разстоянието между точките p_i и p_j е $\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, означаваме го с $dist(p_i, p_j)$ и за удобство допускаме, че се пресмята за време $O(1)$. Дадено е още естествено число $k \leq n$. Да се състави алгоритъм с времева сложност $O(n^2 \lg n)$, който построява такова разбиване на множеството $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ на k дяла, че минималното разстояние между две точки от различни дялове да е възможно най-голямо. Казано по-формално, търси се такова разбиване $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ на $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, че

$$\min_{1 \leq i < j \leq k} \{dist(p_k, p_\ell) \mid p_k \in S_i \wedge p_\ell \in S_j\}$$

е възможно най-голямо.