Решение на последната задача от упражнение 2.

Задача: Да се подредят по асимптотично нарастване следните функции:

$$\sqrt{2}^{\lg n},\quad n^3,\quad n!,\quad (\lg n)!,\quad \lg^2 n,\quad \lg n!,\quad 2^{2^n},\quad n^{\frac{1}{\lg n}},\quad \ln\ln n,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

$$n\cdot 2^n,\quad 4^{\lg n},\quad (n+1)!,\quad \sqrt{\lg n},\quad 2^{\sqrt{2\lg n}},\quad n^{\lg\lg n},\quad \ln n,\quad 2^{\lg n},\quad (\lg n)^{\lg n},\quad \sin(n!)+2,$$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2^k},\quad \frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n},\quad \sqrt[3]{n}\lg\lg n,\quad \binom{2n}{n}$$

Решение:

ВНИМАНИЕ: Добавена е последната функция, с която общият брой на функциите е 24, което означава, че трябва да има точно 23 сравнения. Тук сравненията са по-малко, понеже съм пропуснал тези за функциите, които в асимтотичния смисъл са константи, както и за $n^{\lg\lg n}$, за която става ясно по-надолу.

Първо забелязваме следните няколко работи, които леко улесняват нещата:

• Знаем, че за всяко n е в сила $-1 \le \sin(n) \le 1$, откъдето следва, че за всяко n е изпълнено $1 \le \sin(n!) + 2 \le 3$. Оттук заключваме, че $\sin(n!) + 2 \asymp 1$.

• Припомняме си следното следствие от критерия на Даламбер: ако $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е редица от положителни реални числа и $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, то:

- при $\ell < 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ;
- при $\ell > 1$ същият ред е разходящ;
- при $\ell = 1$ нищо не може да се твърди.

Забелязваме, че по това следствие на критерия на Даламбер редът $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ е сходящ, откъдето знаем, че има константа c, за която $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \le c$. Нека c е такава константа. Следователно $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \le c$. От друга страна, ясно е, че $\sum_{k=1}^{n^2} \ge \frac{1}{2}$. Написвайки всичко това начисто, получаваме $\frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2^k} \le c$, откъдето $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2^k} \asymp 1$.

• Припомняме си следните две свойства на логаритмите:

- $a^{\log_a b} = b$ е в сила за всеки две реални числа a и b, за които има смисъл;
- $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ е в сила за всеки три реални числа a, b и c, за които има смисъл.

Така забелязваме, че $n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\frac{\lg 2}{\lg n}} = n^{\lg 2} = 2 \asymp 1$. А само от първото свойство виждаме, че $\sqrt{2}^{\lg n} = (2^{\lg n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$.

• Припомняме си следното свойство на логаритмите: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ е в сила за всеки три реални числа a, b и c, за които има смисъл. Така забелязваме, че $(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg\lg n}$.

Започваме да подреждаме функциите:

- Сравняваме $\ln\ln n$ с $\sqrt{\lg n}$: Имаме $\ln\ln n \asymp \ln\lg n = \frac{\lg\lg n}{\lg e} \asymp \lg\lg n$. Следователно е ясно, че $\ln\ln n \prec \sqrt{\lg n}$.

- Сравняваме $\sqrt{\lg n}$ с $\ln n$: Имаме $\ln n \asymp \lg n$, откъдето е ясно, че $\sqrt{\lg n} \prec \ln n$.

- Сравняваме $\ln n$ с $\lg^2 n$: Имаме $\ln n \asymp \lg n$, откъдето е ясно, че $\ln n \prec \lg^2 n$.

- Сравняваме $\lg^2 n$ с $2^{\sqrt{2\lg n}}$: Ясно е, че тези две функции са растящи и неограничени. Имаме $\lg(\lg^2 n) = 2\lg\lg n \asymp \lg\lg n$ и $\lg(2^{\sqrt{2\lg n}}) = \sqrt{2\lg n}\lg 2 = \sqrt{2\lg n} \asymp \sqrt{\lg n}$. Знаем, че $\lg\lg n \prec \sqrt{\lg n}$, откъдето $\lg(\lg^2 n) \prec \lg(2^{\sqrt{2\lg n}})$. Следователно $\lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2\lg n}}$.

- Сравняваме $2^{\sqrt{2\lg n}}$ с $\sqrt[3]{n}\lg\lg n$: Ясно е, че двете функции са растящи и неограничени. Имаме $\lg(2^{\sqrt{2\lg n}}) \asymp \sqrt{\lg n}$ и $\lg(\sqrt[3]{n}\lg\lg n) = \lg(\sqrt[3]{n}) + \lg\lg\lg n = \frac{1}{3}\lg n + \lg\lg\lg n \asymp \lg n$. Знаем, че $\sqrt{\lg n} \prec \lg n$, откъдето $\lg(2^{\sqrt{2\lg n}}) \prec \lg(\sqrt[3]{n}\lg\lg n)$. Следователно $2^{\sqrt{2\lg n}} \prec \sqrt[3]{n}\lg n\lg n$.

- Сравняваме $\sqrt[3]{n}\lg\lg n$ с $\frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}$: Имаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}}{\sqrt[3]{n}\lg\lg n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}(\lg\lg n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n}}{(\lg\lg n)^2} = \infty.$$

Следователно $\sqrt[3]{n}\lg\lg n \prec \frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}$.

- Сравняваме $\frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n}$ с $\sqrt{2}^{\lg n}$: Знаем, че $\sqrt{2}^{\lg n} = \sqrt{n}$, откъдето е ясно, че $\frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n} \prec \sqrt{2}^{\lg n}$.

- Сравняваме $\sqrt{2}^{\lg n}$ с $2^{\lg n}$: Имаме $\sqrt{2}^{\lg n} = \sqrt{n}$ и $2^{\lg n} = n$. Знаем, че $\sqrt{n} \prec n$, т.е. $\sqrt{2}^{\lg n} \prec 2^{\lg n}$.

- Сравняваме $2^{\lg n}$ с $\lg(n!)$: Тук е ясно, че $2^{\lg n} \prec \lg(n!)$, понеже $2^{\lg n} = n$, а $\lg(n!) \asymp n\lg n$.

- Сравняваме $\lg(n!)$ с $4^{\lg n}$: Тук е ясно, че $\lg(n!) \prec 4^{\lg n}$, понеже $\lg(n!) \asymp n\lg n$, а $4^{\lg n} = n^2$.

- Сравняваме $4^{\lg n}$ с n^3: Тук е ясно, че $4^{\lg n} \prec n^3$, понеже $4^{\lg n} = n^2$.

- Сравняваме n^3 с $(\lg n)!$: Ясно е, че тези двете функции са растящи и неограничени. Имаме $\lg(n^3) = 3\lg n \asymp \lg n$ и $\lg((\lg n)!) \asymp \lg n\lg\lg n$. Знаем, че $\lg n \prec \lg n\lg\lg n$, откъдето $\lg(n^3) \prec \lg((\lg n)!)$. Следователно $n^3 \prec (\lg n)!$.

- Сравняваме $(\lg n)!$ с $(\lg n)^{\lg n}$: Това сравнение цели да ви накара да си припомните лемата за двамата полицаи ;). Имаме, че за всяко n е изпълнено $0 < n! \le n^{n-1}$, откъдето следва, че за всяко n е в сила $0 < \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}$, откъдето следва, че за достатъчно големи n е изпълнено $0 < (\lg n)! \le (\lg n)^{\lg(n)-1}$, а значи и $0 < \frac{(\lg n)!}{(\lg n)^{\lg n}} \le \frac{1}{\lg n}$. Сега с помощта на лемата за двамата полицаи, като сметнем границата, получаваме $(\lg n)! \prec (\lg n)^{\lg n}$.

- Сравняваме $(\lg n)^{\lg n}$ с $(\frac{3}{2})^n$: Ясно е, че тези две функции са растящи и неограничени. Имаме $\lg((\lg n)^{\lg n}) = \lg(n^{\lg\lg n}) = \lg n\lg\lg n$ и $\lg(\frac{3}{2})^n = n\lg\frac{3}{2} \asymp n$. Знаем, че $\lg n\lg\lg n \prec n$, откъдето $\lg((\lg n)^{\lg n}) \prec \lg(\frac{3}{2})^n$. Следователно $(\lg n)^{\lg n} \prec (\frac{3}{2})^n$.

- Сравняваме $(\frac{3}{2})^n$ с $n\cdot 2^n$: Ясно е, че $(\frac{3}{2})^n \prec 2^n$, и е още по-ясно, че $2^n \prec n\cdot 2^n$ (сметнете границите).

Следователно $(\frac{3}{2})^n \prec n \cdot 2^n$.

- Сравняваме $n \cdot 2^n$ с $\binom{2n}{n}$: Знаем, че $\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$, откъдето

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^n}{\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^n}{\frac{4^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2^n} = 0.$$

Следователно $n \cdot 2^n \prec \binom{2n}{n}$.

- Сравняваме $\binom{2n}{n}$ с $n!$: Имаме $\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$, откъдето е ясно, че $\binom{2n}{n} \prec 4^n$. Значи $\binom{2n}{n} \prec n!$, понеже $4^n \prec n!$.

- Сравняваме $n!$ с $(n+1)!$: Имаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Следователно $n! \prec (n+1)!$.

- Сравняваме $(n+1)!$ с 2^{2^n}: Ясно е, че тези двете функции са растящи и неограничени. Имаме $\lg((n+1)!) \asymp (n+1)\lg(n+1) \asymp n \lg n$ и $\lg(2^{2^n}) = 2^n \lg 2 = 2^n$.

Окончателната подредба е:

$\sin(n!) + 2 \asymp \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k} \asymp n^{\frac{1}{\lg n}} \prec \ln\ln n \prec \sqrt{\lg n} \prec \ln n \prec \lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2\lg n}} \prec \sqrt[3]{n}\lg\lg n \prec \frac{\sqrt{n}}{\lg\lg n} \prec \sqrt{2}^{\lg n} \prec 2^{\lg n} \prec \lg(n!) \prec 4^{\lg n} \prec n^3 \prec (\lg n)! \prec (\lg n)^{\lg n} \asymp n^{\lg\lg n} \prec (\frac{3}{2})^n \prec n \cdot 2^n \prec \binom{2n}{n} \prec n! \prec (n+1)! \prec 2^{2^n}$.