ALG1($n, k \in \mathbb{N}$, като $n \geq k$)

```
1 a ← 1
2 d ← 1
3 for i ← n downto k+1
4     a ← a · i/d
5     d ← d+1
6 return a
```

Зад. 1 Д.С.Д., че ALG1 връща $\binom{n}{k}$.

Реш. Инв. на цикъла:

За всяко дост. на ред 3 е в с

$$a = \frac{\prod_{l=i+1}^{n} l}{(d-1)!} \quad и \quad d = n-i+1$$

Д-во:

I достигане: Имаме $i = n$. З

- $n-i+1 = 1$, но $d = 1$ от ред 2 ✓
- $\frac{\prod_{l=i+1}^{n} l}{(d-1)!} = \frac{\prod_{l=n+1}^{n} l}{(1-1)!} = \frac{1}{1} = 1$, но $a = 1$ от

G1 ($n, k \in \mathbb{N}$, като $n \geq k$)

$a \leftarrow 1$
$d \leftarrow 1$
for $i \leftarrow n$ downto $k+1$
  $a \leftarrow a \cdot \frac{i}{d}$
  $d \leftarrow d+1$
return a

Зад. 1 Д.С.Д, че ALG1 връща $\binom{n}{k}$.

Реш. Инв. на цикъла:

За всяко дост. на ред 3 е в сила

$$a = \frac{\prod_{l=i+1}^{n} l}{(d-1)!} \quad \text{и} \quad d = n-i+1$$

Д-во: Поддръжка: - - - -

a', d' са новите стойности съотв. на a, d

- $a' = \frac{a\, i}{d} = \frac{\prod_{l=i+1}^{n} l}{(d-1)!} \cdot \frac{i}{d} = \frac{\prod_{l=i}^{n} l}{d!}$
- $d' = d+1 = n-i+1+1 = n-i+2$

d се увеличава с 1, а i се намалява с 1. Значи е вярно и за сл. дост.

ALG1($n, k \in \mathbb{N}$, като $n \geq k$)

```
1 a ← 1
2 d ← 1
3 for i ← n downto k+1
4       a ← a · i/d
5       d ← d+1
6 return a
```

Зад. 1 Д.С.Д, че ALG1 връща $\binom{n}{k}$.

Реш. Инв. на цикъла:

За всяко дост. на ред 3 е в сила

$$a = \frac{\prod_{l=i+1}^{n} l}{(d-1)!} \text{ и } d = n-i+1$$

Д-во: Терм:

Посл. дост. на ред 3: $i = k$, значи

- $a = \dfrac{\prod_{l=k+1}^{n} l}{(n-k+1-1)!} = \dfrac{\dots}{(n-k)!}$
- $d = n-k+1$

$F_L(n \in \mathbb{N})$

```
1  s ← 1
2  i ← 0
3  while s ≤ n do
4      s ← 2s
5      i ← i+1
6  return i
```

Зад. 2 Д.С.Д., че F_L връща $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

Реш. **Инв.**

За вс. дост. на ред 3 е в сила:

$S = 2^i$.

Д-во: **База:** I дост: • $S=1$, $i=0$ (ред 1 и ред 2)

• $2^i = 2^0 = S$ ✓

Поддръжка: . . . .

s' - новата стойност на s.

$s' = 2s = 2 \cdot 2^i = 2^{i+1}$

На ред 5 i се увеличава с 1.

Значи е ОК.

```
BubbleSort(A[1..n]: int)
1   for i ← 1 to n
2       for j ← 1 to n−i
3           if A[j] > A[j+1]
4               Swap(A[j], A[j+1])
```

Зад. 3 Д.С.Д., че BubbleSort е коректен сорт. алг.

Реш.

Лема: Фиксираме едно изп. на външ. цикъл и означаваме с A' масива A непоср. преди изп. на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа $i-1$ най-големи ел. на входния A (в сортиран вид), то след прикл. на изп. на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи ел. на входния A в сорт. вид.

Д-во: Инв. на вътр. цикъл (*): За вс. дост. на ред 2 $A[j]$ съдържа най-голям ел. на $A[1..j]$.

Д-во на (*):

База: I дост. на ред 2: $j=1$. Значи $A[1..j] = A[1..1]$ и $A[1] = A[j]$ е най-големият му ел.

```
BubbleSort(A[1..n]: int)
1  for i ← 1 to n
2      for j ← 1 to n−i
3          if A[j] > A[j+1]
4              Swap(A[j], A[j+1])
```

<u>Зад. 3</u> Д.С.Д., че BubbleSort е коректен сорт. алг.

<u>Реш.</u>

<u>Лема:</u> Фиксираме едно изп. на външ. цикъл и означаваме с A' масива A непоср. преди изп. на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа $i-1$ най-големи ел. на входния A (в сортиран вид), то след прикл. на изп. на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи ел. на входния A в сорт. вид.

<u>Д-во:</u> Инв. на вътр. цикъл (*): За вс. дост. на ред 2 $A[j]$ съдържа най-голям ел. на $A[1..j]$.

<u>Д-во. на (*):</u>

<u>Поддръжка:</u> . . . .

<u>Сл. 1</u> $A[j] > A[j+1]$. Значи $A[j]$ е най-голям в $A[1..j+1]$ но j се увеличава с 1 и $A[j]$ и $A[j+1]$ си сменят стойностите. Значи OK ✓

```
BubbleSort(A[1..n]: int)
1   for i ← 1 to n
2       for j ← 1 to n−i
3           if A[j] > A[j+1]
4               Swap(A[j], A[j+1])
```

Зад. 3 Д.С.Д., че BubbleSort е коректен сорт. алг.

Реш.

Лема: Фиксираме едно изп. на външ. цикъл и означаваме с A' масива A непоср. преди изп. на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа $i-1$ най-големи ел. на входния A (в сортиран вид), то след прикл. на изп. на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи ел. на входния A в сорт. вид.

Д-во: Инв. на вътр. цикъл (*):

За вс. дост. на ред 2 $A[j]$ съдържа най-голям ел. на $A[1..j]$.

Д-во. на (*).

Поддръжка: . . . .

Сл. 2 $A[j] \leq A[j+1]$:

$A[j+1]$ е най-голям в $A[1..j+1]$

. . . . .

```
BubbleSort(A[1..n] : int)
1  for i ← 1 to n
2      for j ← 1 to n−i
3          if A[j] > A[j+1]
4              Swap(A[j], A[j+1])
```

Зад. 3 Д.С.Д., че BubbleSort е коректен сорт. алг.

Реш.

Лема: Фиксираме едно изп. на външ. цикъл и означаваме с A' масива A непоср. преди изп. на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа $i-1$ най-големи ел. на входния A (в сортиран вид), то след прикл. на изп. на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи ел. на входния A в сорт. вид.

Д-во: Инв. на вътр. цикъл (*):
За вс. дост. на ред 2 $A[j]$ съдържа най-голям ел. на $A[1..j]$.

Д-во на (*).

Терминация:
Посл. дост. : $j = n-i+1$ и $A[j]$ е най-голям в $A[1..j] = A[1..n-i+1]$