```
BubbleSort(A[1..n] : int)
1   for i ← 1 to n
2       for j ← 1 to n-i
3           if A[j] > A[j+1]
4               Swap(A[j], A[j+1])
```

Лема: A' – името на A спрямо едно фикс. изп. на външ. цикъл непоср. преди достигане на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа (в сорт. вид) $i-1$ най-големи на вх. A, то след завършването на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи на вх. A в сортирн вид.

Тв. BubbleSort е коректен сорт. алг.

Д-во: Инвариант на външ. цикъл (**):

За всяко дост. на ред 1 текущият $A[n-i+2..n]$ съд. $i-1$ най-големи на вх. A в сорт. вид.

Д-во на **:

База: I дост. $i=1$. Значи $A[n-i+2...n] = A[n+1..n]$ = празния подмасив. $i-1=0$. Значи ** е в сила.

```
UBBLESORT(A[1..n]:int)
   for i ← 1 to n
2      for j ← 1 to n-i
3          if A[j] > A[j+1]
4              SWAP(A[j], A[j+1])
```

Лема: A' – името на A спрямо едно фикс. изп. на външ. цикъл непоср. преди достигане на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа $i-1$ най-големи на вх. A (в сорт. вид), то след завършването на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи на вх. A в сортирн вид.

Тв. BUBBLESORT е коректен сорт. алг.

Д-во: Инвариант на външ. цикъл (★★):

За всяко дост. на ред 1 текущият $A[n-i+2..n]$ съд. $i-1$ най-големи на вх. A в сорт. вид.

Д-во на ★★:

Поддр. - - - -

по предполож. $A[n-i+2..n]$ съдържа $i-1$ най-големи на вх. A в сорт. вид. От лемата: $A[n-i+1..n]$ съд. i най-големи на вх. A. i се увел. с 1. OK

```
BubbleSort(A[1..n]: int)
1   for i ← 1 to n
2       for j ← 1 to n-i
3           if A[j] > A[j+1]
4               Swap(A[j], A[j+1])
```

Лема: A' – името на A спрямо едно фикс. изп. на външ. цикъл непоср. преди достигане на ред 2. Ако $A'[n-i+2..n]$ съдържа (в сорт. вид) $i-1$ най-големи на вх. A, то след завършването на вътр. цикъл текущият $A[n-i+1..n]$ съдържа i най-големи на вх. A в сортирн вид.

Тв. BubbleSort е коректен сорт. алг.

Д-во: Инвариант на външ. цикъл (**):

За всяко дост. на ред 1 текущият $A[n-i+2..n]$ съд. $i-1$ най-големи на вх. A в сорт. вид.

Д-во на **:

Терм. посл. дост. на ред 1: $i=n+1$. Значи от **

$A[n-i+2..n]$ съд. $i-1$ …

$\overset{\parallel}{A[1..n]}$

Важни суми:

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$,
- $\sum_{i=a}^{b} 1 = b-a+1$,
- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \mapsto i+k}}^{n} 1 = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \asymp \frac{n}{k}$,
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \asymp n^2$,
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \asymp n^3$

Зад. 1 Да се изрази сложността като ф-я на n:

(1)

```
int a=0;
for(int i=1; i<=n; i++){
    a++;
}
```

Цикълът (тялото) се изп. n пъти, а всяко изп. отнема $\Theta(1)$ време. Значи

$$T(n) \asymp \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Важни суми:

- $$\sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$
- $$\sum_{i=a}^{b} 1 = b-a+1,$$
- $$\sum_{\substack{i=1 \\ i \mapsto i+k}}^{n} 1 = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \asymp \frac{n}{k},$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \asymp n^2,$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \asymp n^3$$

Зад. 1 Да се изрази сложността като ф-я на n:

②
```
int a=0;
for(int i=1; i<=n; i++){
    for(int j=1; j<=n; j++){
        a++;
    }
}
```

$$T(n) \asymp \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n\sum_{i=1}^{n} 1 = n^2$$

Важни суми:

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$,
- $\sum_{i=a}^{b} 1 = b-a+1$,
- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \mapsto i+k}}^{n} 1 = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \asymp \frac{n}{k}$,
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \asymp n^2$,
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \asymp n^3$

Зад. 1 Да се изрази сложността като ф-я на n:

③
```
int a=0;
for(int i=1; i<=n; i++){
    for(int j=1; j<=i; j++){
        a++;
    }
}
```

$$T(n) \asymp \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} (i-1+1) = \sum_{i=1}^{n} i \asymp n^2$$

Важни суми:

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n,$
- $\sum_{i=a}^{b} 1 = b-a+1,$
- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \mapsto i+k}}^{n} 1 = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \asymp \frac{n}{k},$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \asymp n^2,$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \asymp n^3$

Зад. 1 Да се изрази сложността като ф-я на n:

(3)

```
int a=0;
for(int i=1; i<=n; i++){
    for(int j=1; j<=n; j+=i){
        a++;
    }
}
```

$$T(n) \asymp \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \mapsto j+i}}^{n} 1 \asymp \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}_{\lg n} \asymp n \lg n$$

като ф-я на n ...

6

```
s=0;
m=n;
while (m>=1) {
    for(int i=1; i<=floor(n/m); i++){
        S++;
    }
    m--;
}
```

$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$

$$T(n) \asymp \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} 1 = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \asymp \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \asymp n \lg n$$

Решаване на рекурентни уравнения с Мастър-Теоремата (МТ)

Мастър-теорема (МТ):

Нека $a \geq 1$ и $b > 1$ са конст. а $f(n)$ е асимп. полож. ф-я. Нека $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$. Тогава:

Сл. 1: Ако $f(n) = O\left(n^{\log_b a} / n^{\varepsilon}\right)$ за някоя конст. $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;

Сл. 2: Ако $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$;

Сл. 3: Ако:

1) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a} \cdot n^{\varepsilon})$ за някоя конст. $\varepsilon > 0$;
2) $\exists c_{0<c<1} \exists n_0 \forall n_{n \geq n_0} \; a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$.

Тогава $T(n) = \Theta(f(n))$.

Зад. Да се реши $T(n) = 6T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \cdot \sqrt{n}$

Реш. $a \stackrel{def}{=} 6$, $b \stackrel{def}{=} 2$, $f(n) \stackrel{def}{=} n^2 \cdot \sqrt{n} = n^{\frac{5}{2}}$

$\log_b a = \log_2 6$. Сравняваме $\log_2 6$ с $5/2$. Същото е като да сравним $2^{\log_2 6} = 6$ с $2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$. Също като $6^2 = 36$ с $(4\sqrt{2})^2 = 32$. Значи $\log_2 6 > \frac{5}{2}$. Значи има $\log_2 6 - \frac{5}{2} > \varepsilon > 0$. Нека ε е такова. Значи I сл. на МТ е приложим. $\left(n^{\log_2 6 - \varepsilon} \geq n^{\frac{5}{2}}\right)$

Значи $T(n) \asymp n^{\log_2 6}$

Решаване на рекурентни уравнения с Мастър-Теоремата (МТ)

Мастър-теорема (МТ):

Нека $a \geq 1$ и $b > 1$ са конст., а $f(n)$ е асимп. полож. ф-я. Нека $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$. Тогава:

Сл. 1: Ако $f(n) = O\left(n^{\log_b a} / n^{\varepsilon}\right)$ за някоя конст. $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$;

Сл. 2: Ако $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg n\right)$;

Сл. 3: Ако:

1) $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a} \cdot n^{\varepsilon}\right)$ за някоя конст. $\varepsilon > 0$;
2) $\exists c_{0<c<1} \exists n_0 \forall n_{n \geq n_0}\ a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$

Тогава $T(n) = \Theta(f(n))$.

Зад. Да се реши $T(n) = 29T\left(\frac{n}{3}\right) + (\sqrt{n})^n$

Реш. $a \stackrel{def}{=} 29$, $b \stackrel{def}{=} 3$, $f(n) \stackrel{def}{=} (\sqrt{n})^n$

$n^{\log_3 29}$ расте полиномиално. Значи $f(n) \succ n^{\log_3 29}$. Значи $f(n) \succ n^{\log_3 29 + \varepsilon}$ за всяка $\varepsilon > 0$.

Има ли $0 < c < 1$, такова че $\exists n_0 \forall n_{n \geq n_0}\ a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$. Нека $c \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}$ а $n_0 \stackrel{def}{=} 6$. Вярно ли е, че $29 \cdot \left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{n})^n$

$29 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} \cdot (\sqrt{n})^{\frac{n}{3}}$.

III сл. на МТ е приложим.

$T(n) \asymp (\sqrt{n})^n$