Зад. 0 $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{2^k}}$

Реш. $T(n) \asymp T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1 = T\left(\frac{n}{\frac{3}{2}}\right) + 1.$

$a \stackrel{def}{=} 1, \; b \stackrel{def}{=} \frac{3}{2}, \; f(n) \stackrel{def}{=} 1$

$\log_b a = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$

$f(n) \asymp n^{\log_b a} = 1$

II сл. на МТ е приложим.

$T(n) \asymp \lg n$

Метод с характеристичното уравнение

$$T(n) = c_1 T(n-1) + \dots + c_r T(n-r) + \beta_1^n Q_1(n) + \dots + \beta_m^n Q_m(n)$$

- $0 < r \leq n$ – конст.
- $c_1, \dots, c_r$ – произв. конст.
- $\beta_1, \dots, \beta_m$ – конст. : $\beta_i \neq \beta_j$ за $i \neq j$
- $m \geq 0$ – конст.
- $Q_1(n), \dots, Q_m(n)$ – полиноми от ст. съотв. $d_1, \dots, d_m$

Зад. 1 $T(n)=4T(n-2)+n^1\cdot 2^n+4\cdot 3^n\cdot n^0$

Реш.

- Хомогенна част (х.ч.): $T(n)=4T(n-2)$

Характеристичното уравнение е $x^2-4=0$ с мултим-во от корените $\{2,-2\}_M$.

- Нехомогенна част (н.ч.):

$\{\underbrace{2,2}_{1+1},\underbrace{3}_{0+1}\}_M$

- Общо: $\{\underset{0}{2},\underset{1}{2},\underset{2}{2},-2,3\}_M$

$T(n)=C_1 n^0 2^n+C_2\cdot n^1\cdot 2^n+C_3\cdot n^2\cdot 2^n+C_4\cdot(-2)^n$
$+C_5\cdot 3^n \asymp 3^n$

Зад. 2 $T(n) = 4T(n-1) + 3T(n-2) + 1^n$

Реш.

- х.ч.: $T(n) = 4T(n-1) + 3T(n-2)$

  х.у. е $x^2 = 4x + 3$, т.е. $x^2 - 4x - 3 = 0$ с мултим-во от корените $\{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}_M$
- н.ч.: $\{1\}_M$
- общо: $\{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}, 1\}_M$.

$T(n) = C_1(2+\sqrt{7})^n + C_2(2-\sqrt{7})^n + C_3 \cdot 1^n$

$\asymp (2+\sqrt{7})^n$

Наблюдение: $2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$.

Значи $|2-\sqrt{7}| < 1$.

Значи $(2-\sqrt{7})^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Зад. 3 $T(n) = 8T(n-1) - T(n-2) + 2n \cdot 4^n + \underbrace{n \cdot 2^{3n} + 2n \cdot 8^n}_{\text{проблем}}$

Реш. $T(n) = 8T(n-1) - T(n-2) + 2n \cdot 4^n + 3n\, 8^n$

- Х.Ч.:

  Х.У. е $x^2 - 8x + 1 = 0$ с мултим-во от корените

  $\{4+\sqrt{15},\ 4-\sqrt{15}\}_M$

- Н.Ч.:

  $\{4, 4, 8, 8\}$.

- общо: $\{4 \pm \sqrt{15}, 4, 4, 8, 8\}$

Наблюдение: $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$

$\rightarrow 4 + \sqrt{15} < 8$

$T(n) = C_1(4+\sqrt{15})^n + C_2(4-\sqrt{15})^n + C_3 \cdot 4^n + C_4 \cdot n \cdot 4^n + C_5 \cdot 8^n + C_6 \cdot n \cdot 8^n \asymp n \cdot 8^n$

Зад. 4 $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

Реш.

Наблюдение:

Ако n стане 2^{2^m}

имаме $T(2^{2^m}) = T(2^{2^{m-1}}) + 1$.

Как да стане?

Полагаме $m := \lg\lg n$ и

$T^*(m) := T(2^{2^m}) = T^*(m-1) + 1$

Реш. $T^*(m) \asymp m$

$T(2^{2^m}) = T(n) \asymp m = \lg\lg n$

Зад 5. $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+8T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$

Реш.

Наблюдение:

$2T\left(\frac{n}{2}\right)+8T\left(\frac{n}{4}\right)$

степени на едно и също число (в случая 2)

Ако n стане 2^m имаме

$$T(2^m)=2T(2^{m-1})+8T(2^{m-2})+(2^m)^2$$

Полагаме $m:=\lg n$ и

$$T^*(m):=T(2^m)=2T(m-1)+8T(m-2)+(2^m)^2$$

<u>Зад 6</u>. $T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} 3T(k)$

<u>Реш.</u>

$$T(n-1) = \sum_{k=1}^{n-2} 3T(k)$$

$$T(n) = 3T(n-1) + \sum_{k=1}^{n-2} 3T(k) = 3T(n-1) + T(n-1)$$

$$= 4T(n-1) \asymp 4^n$$

Зад. 7 Сложността...

```
HD(A[1..n])
  if n = 1
      return true
  k ← 1
  l ← A[n]
  while k < n do
      if A[k] = l
          return true
      k ← k + 1
  return HD(A[1..n-1])
```

Реш.

- Само едно рек. викане на ред с големина на вх. $n-1$
- Допълнителна работа: $\Theta(n)$

$$T(n) = T(n-1) + n \asymp n^2$$

Зад. 8 Сложността...

```
Foo (A[1..n] : int)
1  s ← 901
2  for k ← 1 to n
3      s ← s + A[k] · A[k]
4  if n = 1
5      return s
6  s ← s + Foo(A[1..n-1])
7  return s
```

Реш.

- Едно викане на ред 6 с големина на вх. $n-1$
- Доп. работа: $\Theta(n)$ (ред 2)

$$T(n) = T(n-1) + n \asymp n^2$$

Зад. 8 Сложността...

```
Abc(A[1..n] : int)
1   s ← 648
2   for i ← 1 to n
3   |   for j ← 1 to n
4   |   |   s ← s + A[i] + A[j]
5   if n < 200
6   |   return s
7   for k ← 1 to 81
8   |   h ← k + ⌊n/3⌋ - 1
9   |   x ← Abc(A[k..h])
10  |   s ← s + x
11  return s
```

Реш.

- 81 викания на ред 9 с големина на вх. $\Theta\left(\frac{n}{3}\right)$
- Допълнителна работа: $\Theta(n^2)$ (ред 2 и ред 3)

$$T(n) = 81T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

За домашно