ДС Семинар №10
Теория на графите

- Нека G е граф. За всеки два върха $u, v \in V$ казваме, се u и v са свързани, ако съществува u-v път. G е свързан, ако всеки два върха в него са свързани

- Въвежда се следната релация $Q_G \subseteq V \times V$:

$$\forall u, v \in V: u Q_G v \leftrightarrow u \text{ и } v \text{ са свързани}$$

Q_G е релация на еквивалентност

Така дефинираната релация Q_G е рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията съседство R_G

- Като говорим за графи, в общия случай релацията на съседство R_G не е рефлексивна, тъй като не позволяваме примки. Ако говорим за графи с възможни примки, то отново е възможно да съществува връх, който няма примка и тогава R_G не е рефлексивна. Тъй като всеки връх сам по себе си е тривиален път с дължина нула, то $\forall u \in V$: съществува u-u път $\rightarrow$ Q_G е рефлексивна.

- Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека $u, v, w \in V$ и съществуват u-v и v-w пътища. Тогава, неформално казано, обединявайки двата пътя като "изрежем" общата им част получаваме u-w път. (необходимо е да премахнем общата им част, тъй като в определението за свързаност се говори за "път", казвайки само "път" се има предвид прост път. Тогава, ако не премахнем общата им част получаваме път, който не е непременно прост)
$\rightarrow$ Q_G е транзитивна

- Вижда се, се $R_G \subseteq Q_G$, тъй като, ако u, v са съседи, $u, v \in V$, то съществува u-v път.

• Нека $G=(V,E)$ е граф.

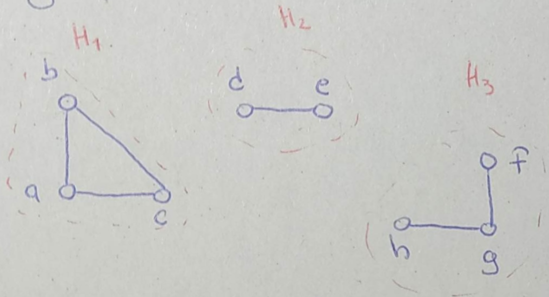
Свързаните компоненти на G са максималните по включване свързани подграфи на G. (свойството е свързаността)

// Пример:

$G=(V,E)$, където $V=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$E=\{(a,b),(a,c),(b,c),(d,e),(h,g),(g,f)\}$

Рисунката на G:



Свързаните компоненти на G са H_1, H_2 и H_3

Свързаните компоненти са графи.

зад① - изпит 2015

Нека графът B_n е n-мерният двоичен куб (върховете са всички n-мерни двоични вектори, два върха са свързани, ако векторите им се различават в точно една позиция). Да се дадат обосновани отговори на следните въпроси:

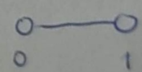
Нека $\alpha = 00\ldots0$ и $\beta = 11\ldots1$

а) Колко ребра има най-късият път от връх α до връх β?

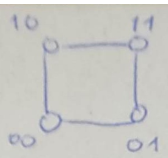
б) Какъв е броят на всички най-къси пътища от връх α до връх β?

Решение:

// B_1 може да се представи по следния начин:

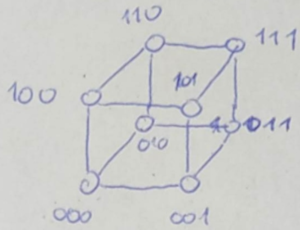


B_2:



Върховете са 2^n на брой

B_3:



- Съвпада с диаграмата на Hasse за R, където:

$S = \{a_1, a_2, a_3\}$, $R \subseteq 2^S \times 2^S$: $R = \{(A,B) \mid A \subseteq B\}$

// Hamming distance

// Gray code

а) Във всяка стъпка от пътя - при всяко прекосяване на ребро настъпва промяна в точно една координата. α и β се различават и в n-те си координати, следователно са необходими n на брой ребра в пътя с краища α и β. Ако допуснем, че съществува път с дължина $\lneq n$, то това означава, че съществува координата, която не е била променена $\lightning$.

Отговор: дължината на най-къс път от α до β е n.

б) Нека си представим, че генерираме тези пътища.

Започваме от връх α. По условие α има n-инцидентни ребра, всяко от което "води" до връх, който се различава от α само в една координата. Тоест за първото ребро от пътя имаме да избираме от n възможности. След като "сме минали" по избраното ребро $-e_1$ се намираме във връх α_1, различаващ се в n-1 координати от β. Отново, α_1 има n инциденти с него ребра, като e_1 е едно от тях. Тогава за второ ребро - e_2 от пътя имаме да избираме от n-1 ребра (не включваме реброто e_1, тъй като тогава ще има възможност да се върнем в в стартовия връх α).

За всеки избор на първо ребро има $n-1$ избора за второ ребро. С аналогични разсъждения получаваме, че броят на търсените пътища е $n!$

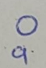
// По-формално: може да се докаже, че съществува биекция между тези пътища и пермутациите на елементите от 1 до n

Нека $G=(V,E)$ е граф.

- Срязващ връх в G е всеки $u \in V$, такъв че $G-u$ има повече свързани компоненти от G.
- Срязващо ребро/мост е всяко $e \in E$, такова че $G-e$ има повече свързани компоненти от G (броят на свързаните компоненти се увеличава с 1ца)

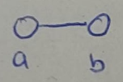
//Пример:

1) $G=(\{a\}, \emptyset)$



Няма срязващи върхове нито ребра.

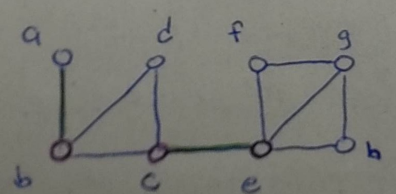
2) $G=(\{a,b\}, \{(a,b)\})$



Няма срязващи върхове

Реброто (a,b) е мост

3) $G=(V,E)$, където G може да се онагледи по следния начин:



Срязващи върхове са: b, c, e

Срязващи ребра/мостове са: (c,e), (a,b)

• Срез в граф

Нека $G=(V,E)$ е граф. Срез в G наричаме всяко 2-разбиване X на V. Ако $X=\{V_1,V_2\}$, то срез-множеството на X е

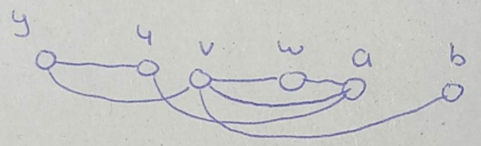
$E' = \{(u,v) \in E \mid u \in V_1$ и $v \in V_2\}$

За всяко ребро $e \in E'$ казваме, че е прекосява среза X.

Теглото на X е $|E'|$. Страните на среза са V_1 и V_2.

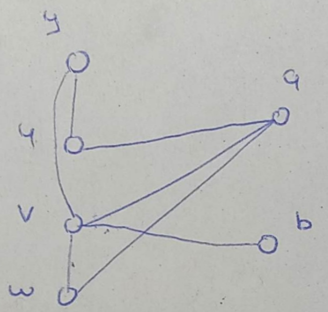
// Пример:

Нека $G=(V,E)$ и G може да се онагледи по следния начин:



Два възможни представяния на G са:

1)

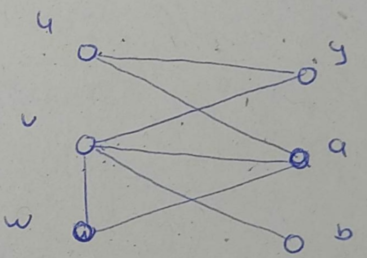


където $V_1=\{y,u,v,w\}$

$V_2=\{a,b\}$

$E'=\{(u,a),(v,a),(w,a),(v,b)\}$

2)



$V_1=\{u,v,w\}$

$V_2=\{y,a,b\}$

$E'=\{(u,y),(u,a),(v,y),(v,a),(v,b),(w,a)\}$

+Колко среза има граф $G=(V,E)$?

Отг: $2^{n-1}-1$

зад 2 - от изпит 2015

Нека $G=(V,E)$ е краен неориентиран граф и $v \in V$ е негов срезващ връх. Нека G_1 е графът, получен от G чрез отстраняване на v и ребрата, инцидентни с него. Дсд, че допълнителният граф на G_1 е свързан.

+ Колко са ребрата на $\overline{G}$, при $G=(V,E)$ - граф?
Отг: $\binom{n}{2} - m$.

Решение:
Всеки граф, в частност и G има поне една свързана компонента. Тъй като G_1 е получен от G чрез отстраняване на срезващ връх (и инцидентните му ребра), то G_1 има поне две свързани компоненти.
За да докажем, че $\overline{G_1}$ е свързан, трябва да докажем, че съществува път между всеки два върха на $\overline{G_1}$.
(Взимаме два произволни върха и доказваме, че съществува път между тях)
Нека x, y са два различни върха на графа $\overline{G_1}$. Тъй като $\overline{G_1}$ и G_1 имат едно и също множество от върхове (по деф. за допълнение на граф), то x, y са върхове и на G_1
Разглеждаме два случая:
1сл) x и y са от една и съща свързана компонента на G_1. Нека вземем връх z, който е от свързана компонента на G_1, която не съдържа върховете x и y.
Тъй като x, y и z са от различни свързани компоненти, то не съществува път между x и z и между y и z. В частност не съществуват ребрата $\overset{e_1}{(x,z)}$ и $\overset{e_2}{(y,z)}$
Тогава $\overline{G_1}$ съдържа тези две ребра и тогава съществува път между x и y с дължина 2: $p = x e_1 z e_2 y$

2сл) x и y са от различни свързани компоненти на G_1.
Тоест не съществува път между x и y. В частност не съществува ребро между x и y - $\overset{e}{(x,y)}$. Но тогава това ребро

се съдържа в допълнението на G_1. Тогава съществува път $p = xey$ между x и y с дължина единица.

Показахме, че за произволни два върха x, y от $\bar{G}_1$ съществува x-y път $\Rightarrow$ $\bar{G}_1$ е свързан □.

• Оцветяване на върхове

Нека $G=(V,E)$ е граф. Оцветяване на върховете на G, е функция $f: V \to C$, където C е множество, чиито елементи се наричат цветове. Изискването за f е: $\forall (u,v) \in E: f(u) \neq f(v)$

- минималният брой цветове, с който може да бъде оцветен даден граф G, се нарича хроматично число на G. Бележи се с "$\chi(G)$".

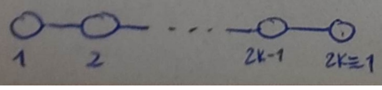
Ако $\chi(G)=k$, казваме, че G е k-оцветим

Граф $G=(V,E)$ да е двуоцветим е същото като G да бъде двуделен.
Съществува взаимна еднозначност м/у оцветяването и деловете V_1 и V_2.

Th. Нека $G=(V,E)$ е непразен граф. $\chi(G)=2$ тстк G няма нечетни цикли

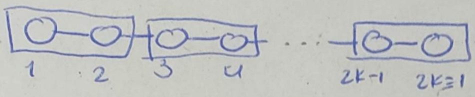
· Неформално доказателство:

Нека $\chi(G)=2$. Допускаме, че има цикъл c с нечетна дължина. $|c| = 2k-1$, $k \geq 2$. Тогава c съдържа 2k върха.

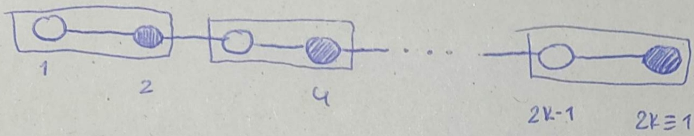


(2k-тият връх съвпада с 1-я)

Нека групираме /разбием цикъла c на двойки върхове по следния начин:



Има k на брой такива двойки. От $\chi(G)=2$ следва, че върховете от всяка двойка са с различни ~~върхове~~ цветове, като първият връх от всяка двойка, БОО, е оцветен в бяло:



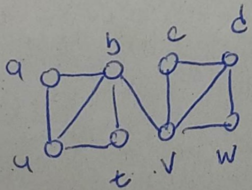
Получихме, че първият връх е оцветен в бяло, а 2k-тият - в черно, което е противоречие, тъй като първият (1) и последният (2k) връх от c съвпадат (от c - цикъл).

→ не съществува цикъл с нечетна дължина.

+ Колко оцветим е пълен граф на n върха?

Отг: n-оцветим

Зад ③ Какво е хроматичното число на графа, представен по следния начин:



Отг. 3

• Нека G е граф.

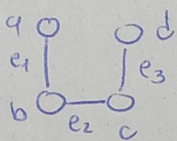
• Хамилтонов цикъл в G е всеки цикъл в G, съдържащ всички върхове на G.

• Хамилтонов път в G е всеки път в G, съдържащ всички върхове на G.

G е Хамилтонов, ако в него има Хамилтонов цикъл.

Всеки цикъл в частност е път, следователно, ако в G има Хамилтонов цикъл, то в G има и Хамилтонов път. (премахваме последния връх и ребро от цикъла)
Обратното не е вярно, например

$G = (\{a,b,c,d\}, \{(a,b),(b,c),(c,d)\})$ има представяне



Има Хамилтонов път, но не и Х.ц.

- Всеки Хамилтонов цикъл има дължина точно n.
- Ако графът има срязващ връх, то той не е Хамилтонов
- Ако графът не е свързан, в него няма Хамилтонов път

• Ойлеров цикъл в G е цикъл, не непременно прост, който съдържа всяко ребро точно веднъж.

• Ойлеров път в G е път, не непременно прост, съдържащ всяко ребро точно веднъж.

~~G е Ойлеров, ако съдържа всяко ребро точно ве~~

G е Ойлеров, ако има Ойлеров цикъл.

! G има Ойлеров цикъл тстк всеки връх е от четна степен и G е свързан