ДС Семинар № 11

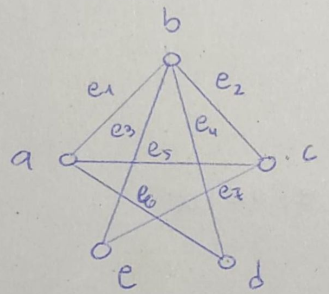
Теория на графите

зад. за упражнение:

Нека $G=(V,E)$ е двуделен граф и $|V|\geq 5$. Д-се, $\overline{G}$ не е двуделен.

зад. ① Кои от графите, отговарящи на следните представяния, са Хамилтонови?

а)



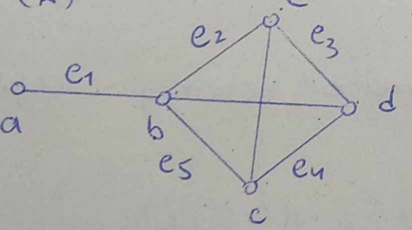
(Δ) Хамилтонов е.

Примерен цикъл:

$c = a\, e_5\, c\, e_7\, e\, e_5\, b\, e_4\, d\, e_6\, a$

б)

(★)

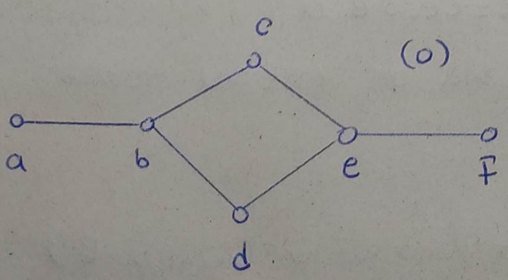


Не е Хамилтонов (съдържа срезващ връх)

(★) съдържа Хамилтонов път:

$p = a\, e_1\, b\, e_2\, e\, e_3\, d\, e_4\, c$

в)

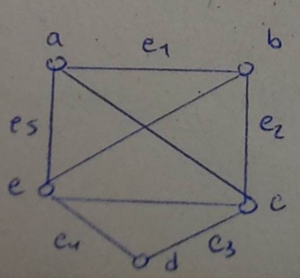


(o) Не е Хамилтонов.

Не съдържа и Хамилтонов ~~цикъл~~ път.

// Няма как да не повторим връх/ребро //

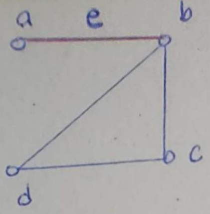
г)



Хамилтонов е.

$c = a\, e_1\, b\, e_2\, c\, e_3\, d\, e_4\, e\, e_5\, a$

д)

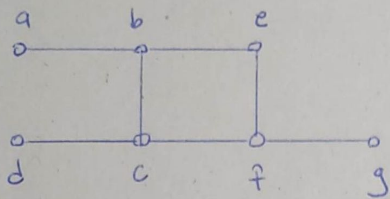


Не е Хамилтонов.

Всеки цикъл, съдържащ всички върхове би трябвало да съдържа реброто e два пъти.

Съдържа Хамилтонов път.

е)

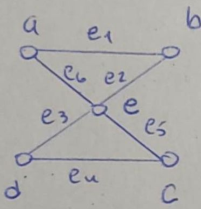


Не е Хамилтонов.

Не съдържа Хамилтонов път.

зад② Кои от графите, отговарящи на следните представяния са ~~[illegible]~~ Ойлерови? Кои имат Ойлеров път?

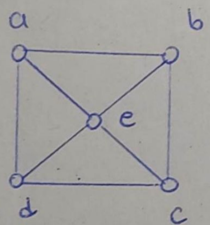
а)



Ойлеров е.

Например, $c = a e_6 e e_5 c e_4 d e_3 e e_2 b e_1 a$.

б)

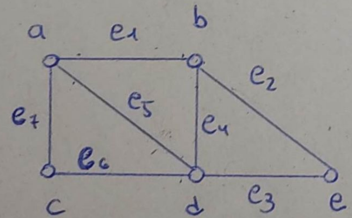


Не е Ойлеров.

Не съдържа Ойлеров път

// Има повече от два върха от нечетна степен.

в)



Не е Ойлеров.

Съдържа Ойлеров път

$p = b e_2 e e_3 d e_4 b e_1 a e_7 c e_6 d e_5 a$

// Има точно два върха от нечетна степен

// Свързан мултиграф G има Ойлеров път (но не и Ойлеров цикъл) тстк G има точно два върха от нечетна степен.

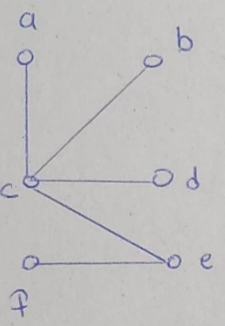
Определение 1

Дърво е всеки свързан, ацикличен граф.

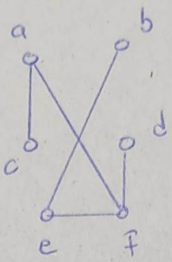
// Граф G е дърво тстк съществува единствен път между всеки два върха на G.

// Пример: Кои от следните изобразяват дървета?

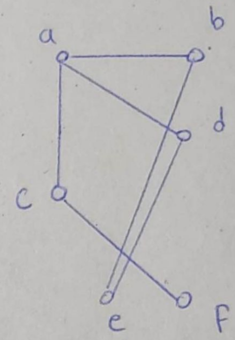
а)



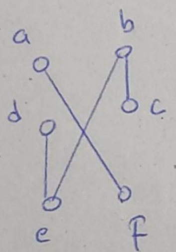
б)



в)



г)



Отговор: а) и б) са (представляват) дървета, тъй като са свързани и ациклични

в) съдържа цикъл c = abeda - не е дърво.

г) Има две свързани компоненти - Не е дърво.

Определение 2

Множеството от дърветата се дефинира така:

1) База: Всеки тривиален граф е дърво.

2) Индуктивна стъпка: Ако $T=(V,E)$ е дърво и u е връх в T и w е връх, който не е в T, то $T'=(V\cup\{w\}, E\cup\{(u,w)\})$ е дърво

Твърдение: Определение 1 и Определение 2 са еквивалентни.

Д-во.

=>) Ще докажем, че всеки граф принадлежащ на индуктивно-генерирано-то множество от определение 2 е свързан и ацикличен:

1) База: $G = (\{u\}, \emptyset)$.

G е свързан и ацикличен.

2) Допускаме, че $T = (V, E)$ от инд. стъпка в определение 2 е свързан и ацикличен. Ще докажем, че $T' = (V \cup \{w\}, E \cup \{(u,w)\})$ е свързан и ацикличен:

I) Свързан.

Нека $y, x \in V(T')$

1сл) $y \in V(T)$ и $x = w$

Дали $y \equiv u$ е без значение за доказателството.

От $y, u \in V(T)$ по ИП знаем, че съществува $y-u$ път в T

T' е получен чрез T с добавяне на върха $w = x$ и реброто $(u, w=x)$. Тоест в T' има път $y-u-w=x$ => съществува път между y и x.

2сл) $y, x \in V(T)$

Тогава по ИП съществува $y-x$ път в T, същият път съществува и в T'

3сл) $y = x = w$

Съществува тривиален път между y и x с дължина 0 в T'

=> T' е свързан

II) Ацикличен

От ИП знаем, че никой връх от T не участва в цикъл, върхът w не участва в цикъл, тъй като $d(w) = 1$, а връх от степен 1 не може да участва в цикъл. Тоест никой връх от T' не участва в цикъл => T' е ацикличен

=> T' е свързан и ацикличен.

б/ Ще докажем, че всеки свързан, ацикличен граф може да се генерира от процедурата в определение 2.

Нека $T=(V,E)$ е свързан и ацикличен

1сл) $T=(\{u\},\emptyset)$. Тогава T се генерира от базата на определ.2.

2сл) $E\neq\emptyset$. Тогава T има поне един връх от степен 1. $-v_1$

Нека T_1 се получава от $T-v_1$. Ако T_1 е тривиалният граф, то той се конструира от базата, след което прилагаме индуктивната стъпка за да добавим изтрития v_1 и получаваме точно T.

Ако $E(T_1)\neq\emptyset$, то продължаваме да премахваме върхове $v_2, v_3, \ldots v_k$ от степен 1, получавайки съответно дърветата $T_2, T_3, \ldots, T_k$

като T_k е тривиалният граф. Него получаваме от базата на определение 2 и след това чрез k на брой прилагания на индуктивната стъпка генерираме обратно T.

// с неформални думи, премахваме върхове от степен 1, докато не получим тривиалният граф и в ред, обратен на изтриването, добавяме върховете отново, така показваме, че след краен брой прилагание на стъпката в определение 2 може да генерираме T

По-формално д-во - в лекционните записки.
//

• **Определение**

Гора е всеки ацикличен граф.

• **Свойство 1.**

Всяко дърво с n върха има $n-1$ ребра

Д-во:

С индукция по n.

• Определение

Нека $T=(V,E)$ е дърво. Избираме произволен връх $r\in V$ и го наричаме корен. След избора на корен T става кореново дърво.

Нека $u,v\in V$: $(u,v)\in E$

1сл) u е предпоследният връх по уникалният път $r-v$. Тогава u е родител на v и v е дете на u.

2сл) v е предпоследният връх по уникалния път $r-u$. Тогава v е родител на u и u е дете на v.

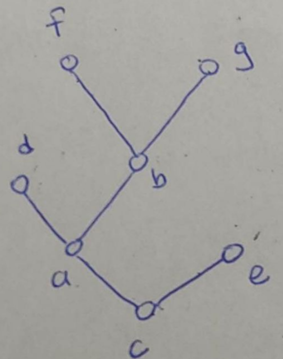
• Листа на T са точно тези върхове, които нямат деца

• Вътрешните върхове на кореново дърво са точно тези върхове, които не са листа.

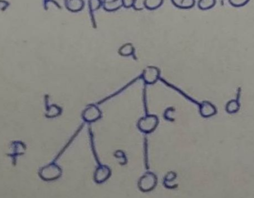
• Коренът е и листо само когато кореновото дърво има единствен връх.

// Пример:

Нека $T=(V,E)$ е дърво и T може да се онагледи по следния начин:

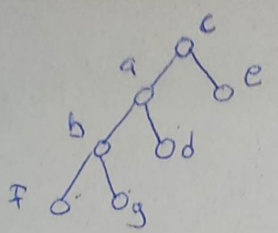


→ Кореновото дърво T', получено от T след избиране на корен a:



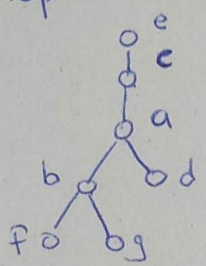
Листата на T' са f, g, e, d

→ Кореновото дърво T'', получено от T след избиране на корен c



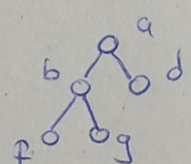
листата са f, g, d, e

→ Кореновото дърво T''', получено от T след избиране на корен e



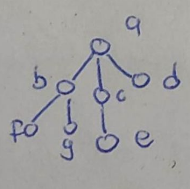
листата са f, g, d

Поддървото на T''', вкоренено във връх a, се онагледява по следния начин:



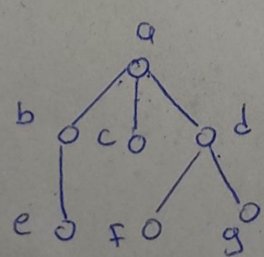
Бележим с $T'''[\![a]\!]$

Поддървото на T', вкоренено във връх a, може да се представи по следния начин:



очевидно $T'[\![a]\!] = T'$

Пример: Нека $T=(V,E)$ е дърво, което може да се представи по следния начин:



- Височината на дървото е 2.
- Височината на връх b е равна на вис. на връх c = вис. на връх d = 1
- Височината на листата е 0
- Предшественици на връх f са върховете d и a.

- Дълбочината на c е 1
- Дълбочината на f е 2.

- Наследници на връх d са f и g
- Разклонеността на T е 3 (максималният брой деца на кой да е връх в T)

// Когато кажем само "дърво", разбираме не-кореново дърво.

Зад.

Нека $T=(V,E)$ е дърво, което е кореново.

- Д-м, че $m=n-1$

Д-во:

С индукция по n.

1) База: $n=1$.

Дърво с единствен връх няма ребра, следователно $m=0=n-1$ ✓

2) Допускане, че всяко дърво с k върха има $k-1$ ребра. $k \in \mathbb{N}^+$

3) Разглеждаме дърво T с $k+1$ върха:

Нека $v \in V(T)$ е листо. (Такова има, тъй като $|V|<\infty$)

Нека w е родител на v.

Нека $T'=(V \setminus \{v\}, E \setminus \{(v,w)\})$. Тогава T' има k върха и по ИП T' има $k-1$ ребра. (T' е дърво тъй като след премахването на върха v и реброто (v,w) T' остава свързан, а чрез премахване на връх и ребро, цикли не могат да се появят)

Тогава T има k ребра, ~~тъй като~~ ~~върха~~ като има едно ребро - (v,w) повече от T'

$\Rightarrow m=n-1$ □

Изборът на корен не влияе на доказателството

$\Rightarrow$ За всяко дърво $T=(V,E)$ е в сила: $m=n-1$.

- Ниво в кореново дърво е множество от върхове, имащи една и съща дълбочина

• Нека T е кореново дърво. T е k-ично, ако всеки вътрешен връх има не повече от k деца. T се нарича пълно k-ично дърво, ако всеки връх има точно k деца.

Зад. Дсд, че всяко пълно k-ично дърво с i на брой вътрешни върха има $n = k.i+1$ върха.

Решение:

Всеки връх, освен корена, е дете на вътрешен връх. Всеки от i-те вътрешни върха има k на брой деца, тогава има $k.i$ върха в дървото с изключение на корена. Следователно дървото има $k.i+1$ върха.
включихме и корена

Зад. Дсд следната теорема

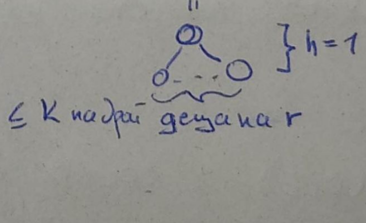
Th. Нека T е k-ично кореново дърво с височина h. Тогава T има най-много k^h листа.

1-во:

Ще докажем теоремата с индукция по височината h

1) База: $h=1$.

Разглеждаме всички k-ични дървета с височина 1. Тези дървета се състоят от корен и не повече от k (негови) деца, всяко от които е листо (ако някое от тях не беше листо, то височината щеше да е по-голяма от 1)



Базата е изпълнена.

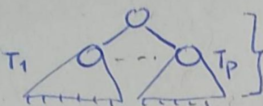
2) Допускане

Допускаме, че твърдението е в сила за всички k-ични дървета с височина, по-малка от h.

3) Стъпка

Нека T е k-ично дърво с височина h. Листата на T са листата на на поддърветата, вкоренени в децата на r (корена на T)

//



височина h, $p \le k$

$T_1, \dots, T_p$ имат височина $\le k$

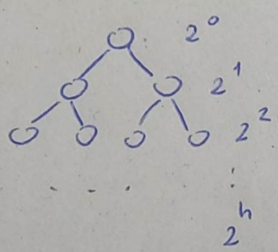
Всяко от тези дървета $T_1, \dots, T_p$ има височина $\le h-1$ и от ИП резултатът за тях е изпълнен. Всяко от тях има $\le k^{h-1}$ листа. Тези дървета са $p \le k$ на брой $\Rightarrow$ общият брой листа е $\le k \cdot k^{h-1}$ $= k^h$.

с което теоремата е доказана.

зад. Колко върха има ~~пълно~~ съвършенно двоично дърво с височина h?

Отг. $2^{h+1} - 1$

Идва от резултата $\sum_{k=0}^{h} 2^k = 2^{h+1} - 1$, доказан чрез индукция



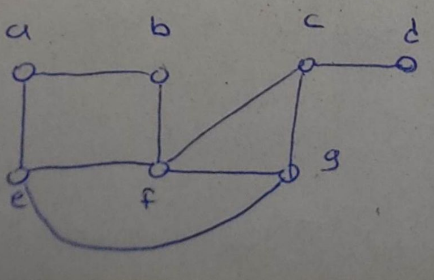
зад.

• Покриващо дърво

Нека $G=(V,E)$ е свързан граф. Покриващо дърво на G е всяко дърво $T=(V,E')$, където $E' \subseteq E$.

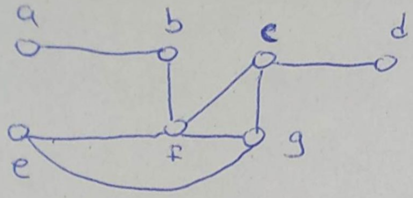
Пример:

Нека $G=(V,E)$ е граф, който може да се представи:

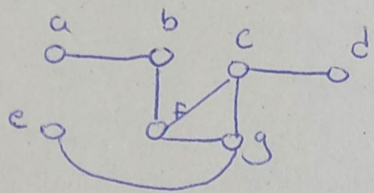


Може конструктивно да намерим покриващо дърво T на G като на всяка стъпка премахваме по едно ребро от цикъл в G докато получения граф стане ацикличен (запазване свързаността)

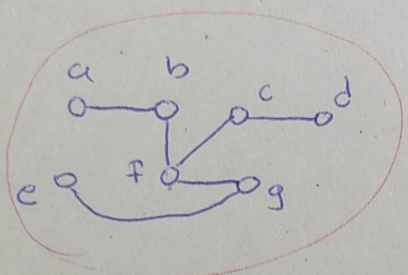
1 стъпка)



2 стъпка)



3 стъпка)



– покриващо дърво на G

Други възможни покриващи дървета на G: