ДС Семинар №12

Теория на графите

• Ориентиран граф.

Ориентиран граф е наредена двойка $G=(V,E)$, където $V \neq \emptyset$ е м-во от върхове, E е м-во от ребра, като

$$E \subseteq (V \times V) \setminus \underbrace{\{(u,u) \mid u \in V\}}_{(\Delta)}$$

↳ В контекста на обикновените (не мулти) графи, казвайки само "граф" не позволяваме примки.

Ориентиран граф с възможни примки се дефинира по същия начин, с изключение на това, че (Δ) липсва в дефиницията.

\+ ориентираните графи без примки точно съответстват на антирефлексивните релации.

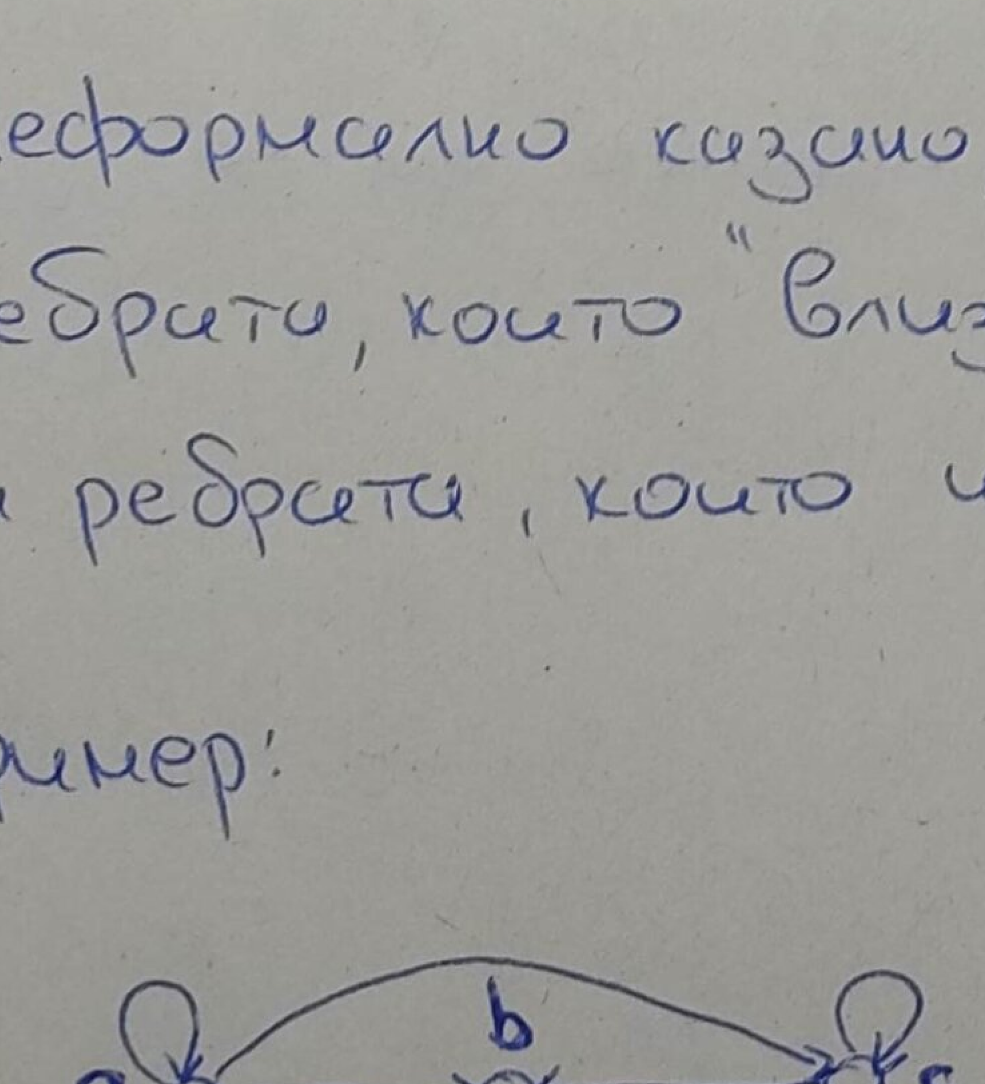
• Родители и деца, входна и изходна степен на връх

Нека G е ориентиран граф. Нека $(u,v) \in E(G)$. Тогава казваме, че u е родител на v и v е дете на u.

Още, u е началото на реброто (u,v), а v - краят.

Неформално казано, входната степен на връх $u \in V$ е броят на ребрата, които "влизат" в u, а изходната степен на u е броят на ребрата, които излизат от u.

Пример:



Родители и деца

a е родител на b

a е родител на a

a е родител на e

...

b е дете на a

a е дете на a

e е дете на a

...

Входна и изходна степен

Входна:	Изходна
$\deg^-(a) = 2$	$\deg^+(a) = 4$
$\deg^-(b) = 2$	$\deg^+(b) = 1$
$\deg^-(c) = 3$	$\deg^+(c) = 2$
$\deg^-(d) = 2$	$\deg^+(d) = 2$
$\deg^-(e) = 3$	$\deg^+(e) = 3$
$\deg^-(f) = 0$	$\deg^+(f) = 0$

Тъй като всеки връх има начал .

Тъй като всяко ребро е има начало v и има край u ($d^+(v)$ брои реброто е, $d^-(u)$ брои реброто е), то сумата на всички изходни степени брои всички ребра по веднъж. Сумата на всички входни степени също брои всяко ребро точно веднъж:

$$\sum_{u \in V} deg^-(v) = \sum_{u \in V} deg^+(v) = |E|$$

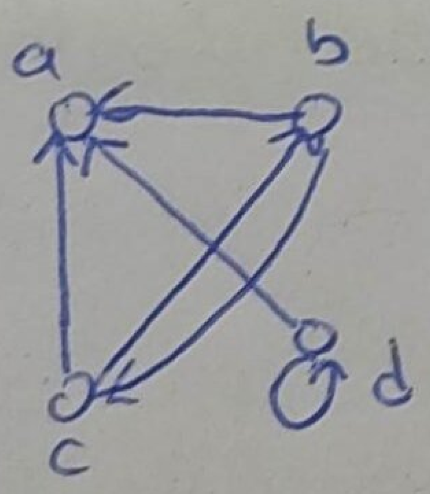
· Сифон / Източник .

Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф. $\forall v \in V$: ако $d^-(v)=0$, то v е източник. $\forall v \in V$: ако $deg^+(v)=0$, то v е сифон.

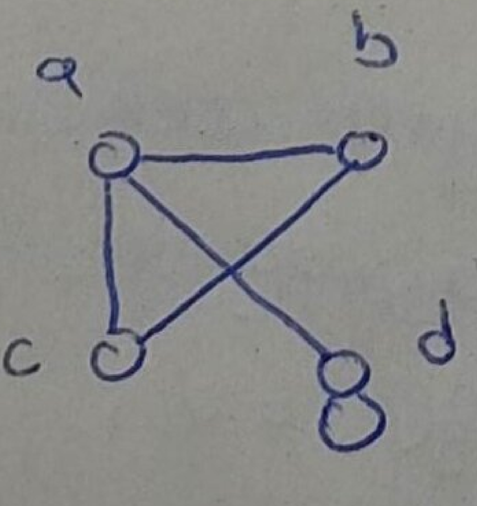
- Всеки изолиран връх е и източник, и сифон. (на ориент. граф)

· Съответен неориентиран граф.

Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф с възможни примки, който може да се представи така:

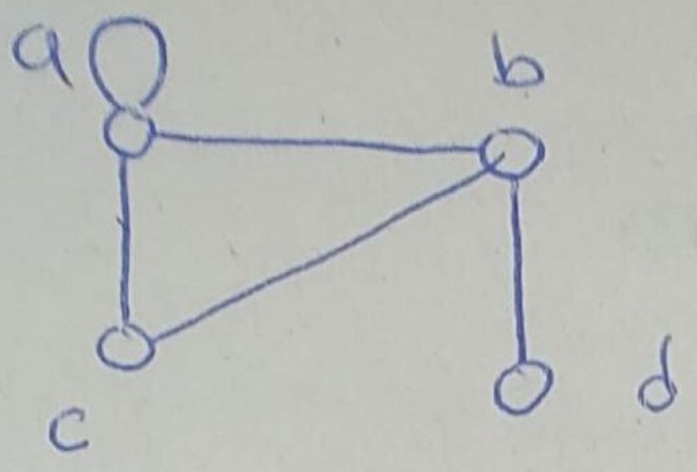


Тогава, съответният неориентиран граф на G може да се представи така:

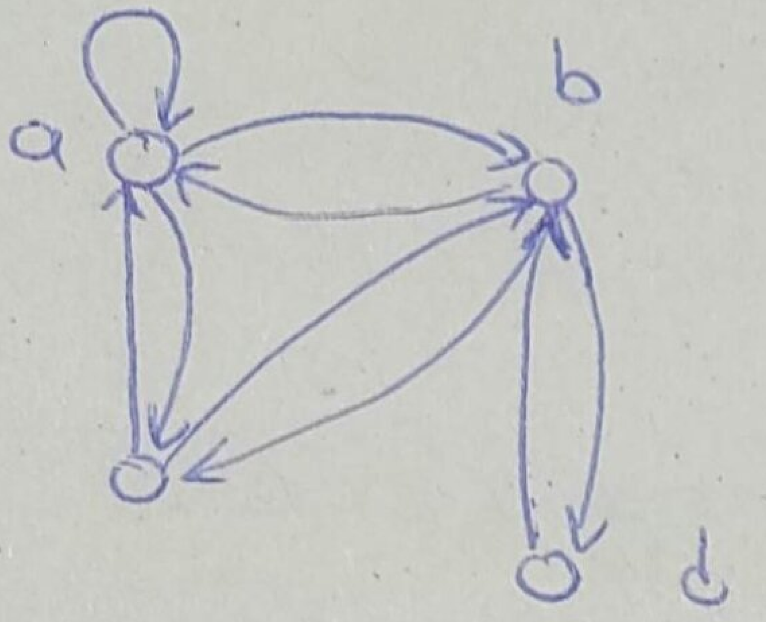


· Съответен ориентиран граф

Нека $G=(V,E)$ е граф с възможни примки и G може да се представи така:



Тогава, съответният ориентиран граф на G, може да се представи така:

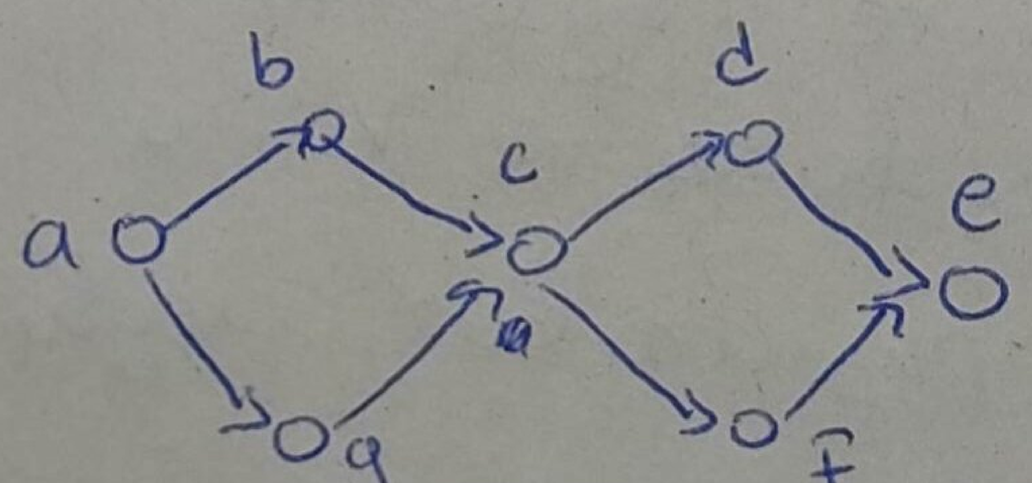


- **Ориентиран мултиграф**

Ориентиран мултиграф е наредена тройка $G=(V,E,f_G)$, където V е непразно м-во от върхове, E е м-во от ребра, $V\cap E=\emptyset$ и $f_G : E\to V\times V$ е свързваща ф-ция.

- пътищата и циклите в ориентиран граф се дефинират аналогично, к\ разликата
Ако v е началният връх на пътя, а u - крайният, то в ориентираните графи **НЕ** казваме път между u и v, а път **от** u **до** v.

// Пример.
Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф, имащ следното представяне:



Пътищата **от** a **до** e са 4 на брой, докато пътища **от** e **до** a не съществуват.

• ДАГ

ДАГ е всеки ориентиран, ацикличен граф/мултиграф.

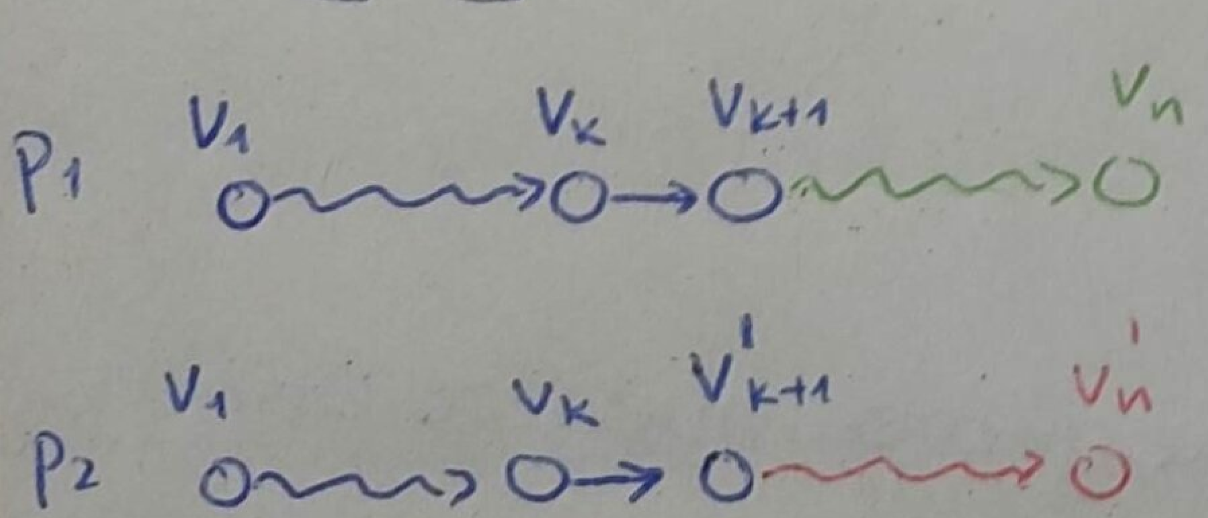
- Всеки даг съответства на някаква релация (има (u,v) ребро, ако u е в релация с v). Ако "направим" рефлексивно и транзитивно затваряне на релацията, представена от даг-а, ще получим точно частична наредба.
- източниците в даг съответстват на минималните елементи на релацията, представена чрез даг-а, а сифоните – на максималните

Th. Всеки даг има поне един източник и поне един сифон

– д-во с допускане на противното + принципа на Дирихле.

Th. Ако в даг съществува Хамилтонов път, то той е единствен.

Неформално доказателство.
Нека $G=(V,E)$ е даг. Допускаме, че съществуват p_1 и p_2 – Хамилтонови пътища, като $p_1 \neq p_2$. Тъй като двата пътя са различни, то съществува позиция (връх), в която се различават. Нека $k+1$ е първата позиция, в която двата пътя се различават. (от началото към края на пътя)
Ситуацията може да се представи по следния начин:



Тъй като p_1 и p_2 са Хамилтонови пътища, то те съдържат всеки връх от V точно по веднъж. От това и от факта, че v_{k+1} и v'_{k+1} са първите върхове, в които p_1 и p_2 се различават, следва че p_1 съдържа върха v'_{k+1} в подпътя от v_{k+1} до v_n, а p_2 съдържа върха v_{k+1} в подпътя от v'_{k+1} до v'_n:

$P_1: \; v_1 \rightsquigarrow v_k \to v_{k+1} \rightsquigarrow v'_{k+1} \rightsquigarrow v_n$

$P_2: \; v_1 \rightsquigarrow v_k \to v'_{k+1} \rightsquigarrow v_{k+1} \rightsquigarrow v'_n$

То тогава в G би имало ориентиран път q от връх v_{k+1} до връх v'_{k+1} и ориентиран път t от v'_{k+1} до v_{k+1}. Обединявайки двата пътя q и t, "премахвайки"/"изрязвайки" повторенията в така получения път, получаваме цикъл, което е невъзможно, тъй като G е даг.

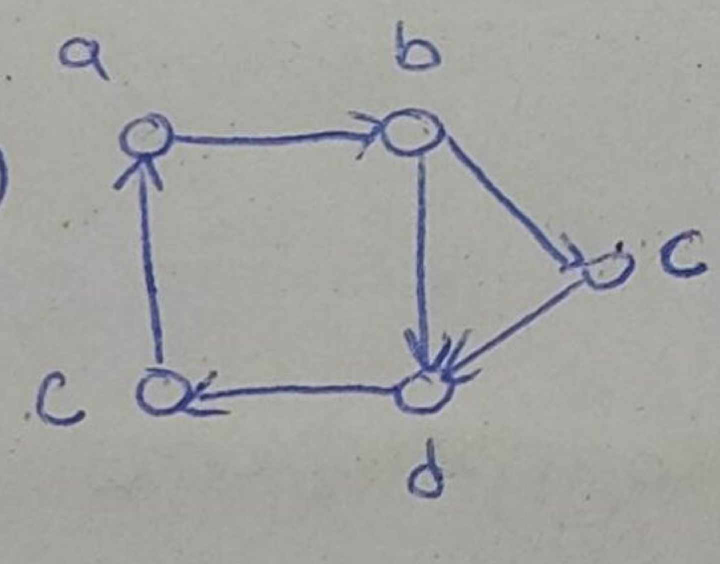
$\rightarrow P_1 = P_2$

Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф. $\forall u,v \in V$ казваме, че u и v са силно свързани, ако съществува път от u до v и съществува път от v до u. G е силно свързан, ако всеки два върха в него са силно свързани.

// Пример:

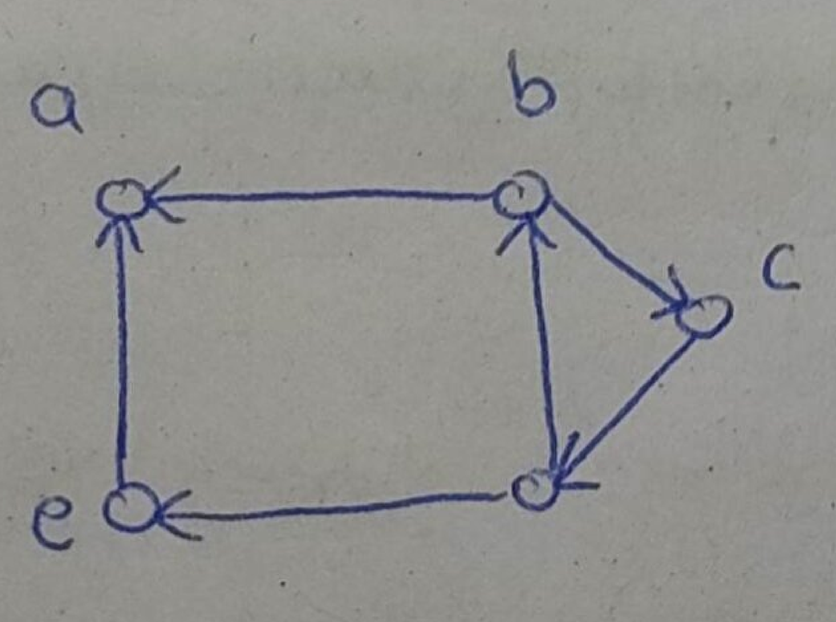
Нека ориентиран граф $G=(V,E)$ може да се представи:

а)



G е силно свързан.

б)



G не е силно свързан. Например, няма път от a до b.

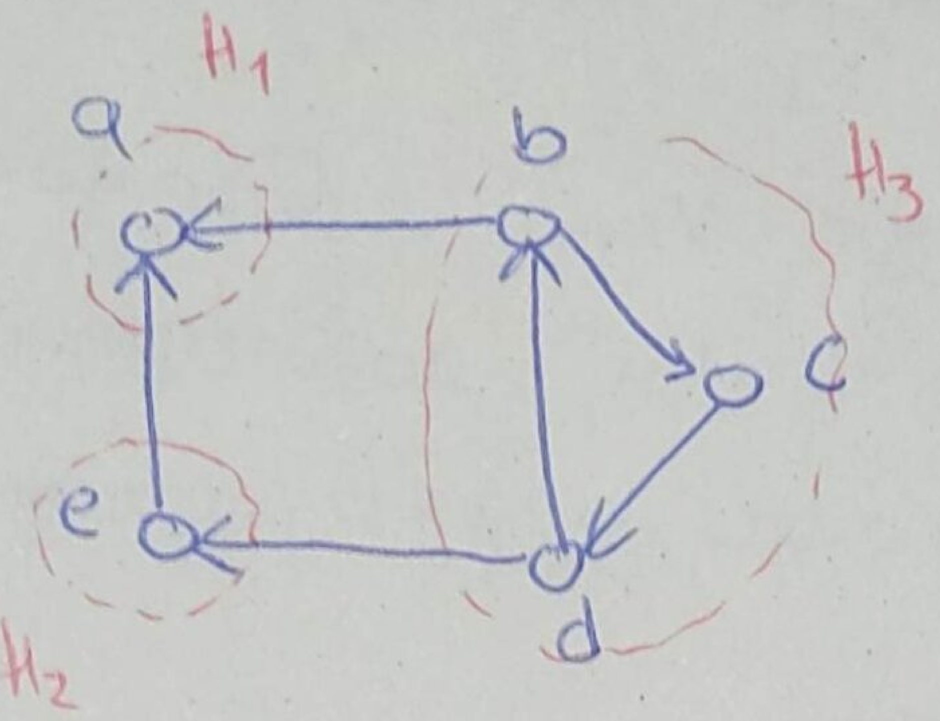
• Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф.

Силно свързаните компоненти на G са максималните по включване силно свързани подграфи.

// Пример:

Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф и G може да се представи по следния начин:

а)



Силно свързаните компоненти на G са подграфите H_1, H_2, H_3

+ сифоните и източниците участват в силно свързани компоненти, състоящи се от един единствен връх - самите те.

+ при ориентираните графи може да има ребро, което не принадлежи на никоя силно свързана компонента. При неориентираните графи не е така - всяко ребро принадлежи на точно една свързана компонента (не съществуват ребра м/у компонентите).

- Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф

Нека H е съответният му неориентиран граф. Подграфите на G, индуцирани от класовете на еквивалентност на релацията на свързаност върху H, се наричат слабо свързаните компоненти на G

+ както при неориентираните графи всяко ребро принадлежи точно на една свързана компонента

+ Какъв трябва да е граф G, такъв, че всяко ребро да не принадлежи на силно свързана компонента?

Отг: ДАГ.

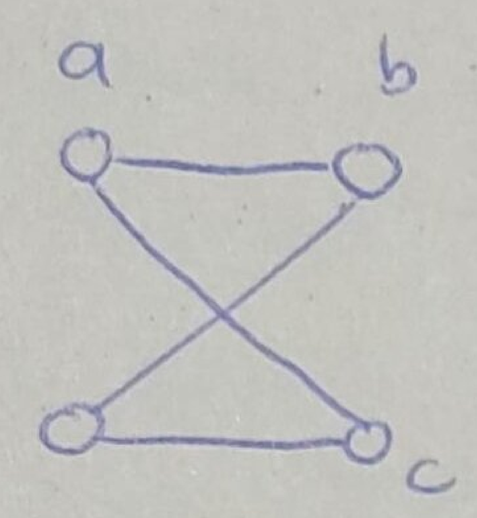
• Матрица на съседство на граф G X

$M_{n \times n}$ булева симетрична матрица:

$$M[i,j] = \begin{cases} 0, & i=j \\ 0, & (i,j) \notin E \\ 1, & (i,j) \in E \end{cases}$$

// Пример

Нека G е граф, който може да се представи така:



Матрицата на съседство на G е:

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	0	1
c	1	0	0	1
d	0	1	1	0

Матрицата на съседство на даден граф се "основава" на избора на наредба на върховете. По тази причина може да има до n! различни матрици на съседство на граф с n върха в зависимост от наредбата, която сме избрали за върховете (n! начина има за тази наредба)

+ Каква е матрицата на съседство на празния граф?

+ Какво ни дава сумата на елементите в ред i?

- ако графите са разредени, представянето с матрици не е удачно

- Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф.

Матрица на съседство на G е $n \times n$ булева матрица, където:

$$M[i,j] = \begin{cases} 0, & i=j \\ 0, & (i,j)\notin E \\ 1, & (i,j)\in E \end{cases}$$

– M не е задължително симетрична

+ Какво ни дава сумата на елементите в колона i?

+ Какво ни дава сумата на елементите в ред i?

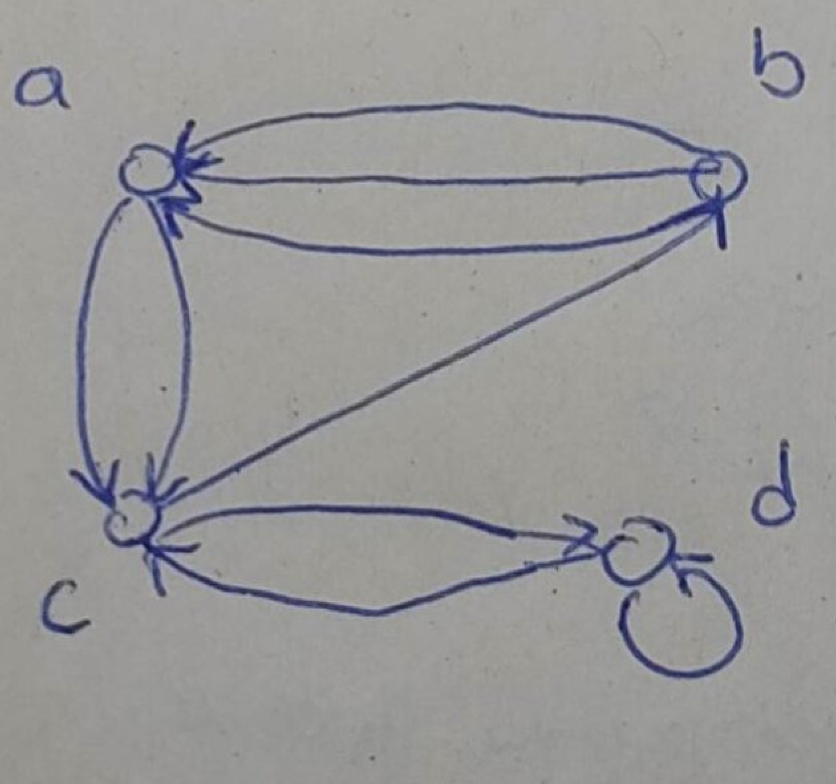
- Нека $G=(V,E,f_G)$ е ориентиран мултиграф

Матрицата на съседство на G е $n \times n$ матрица от естествени числа, където:

$$M[i,j] = \left\{ \; |\{e\in E \mid f_G(e)=(i,j)\}| \right.$$

// Пример:

Нека $G=(V,E,f_G)$ е ор. м., който може да се представи по следния начин:



	a	b	c	d
a	0	0	2	0
b	3	0	0	0
c	0	1	0	1
d	0	0	1	1

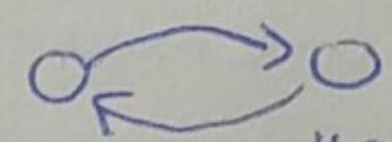
Th. За всеки ориентиран мултиграф G и за всяко $k\geq 0$ е изпълнено, че $M^k[i,j]$ е броят на ориентираните пътища с дължина k от i до j в G, където M е матрицата на съседство на G

Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф, който е ацикличен с n върха. Нека M е матрицата му на съседство. Нека M^n е матрицата M, повдигната на n-та степен. Да се докаже или опровергае, че сумата от елементите на M^n е задължително по-малка от $\sqrt{n}$.

Решение:

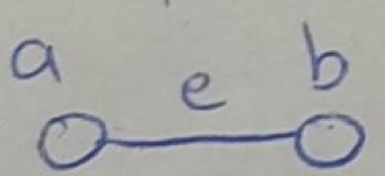
Знаем, че $M^n[i,j]$ съдържа броя на не непременно простите ориентирани пътища, за всяко $i,j \in \{1,\dots,n\}$, с дължина точно n.

Но G е даг и във всеки даг всеки път е с дължина най-много $n-1$, в противен случай би имало цикъл. (☆)

// (☆) е така, тъй като в ориентиран граф най-късият прост цикъл е с дължина 2: 

Тоест, ако съществува цикъл (който не е непременно прост) в ориентиран граф, то ще съществува и прост цикъл.

При неориентираните графи това не е така:

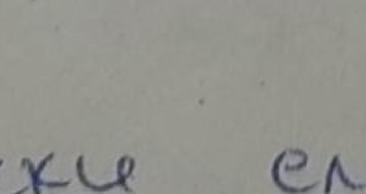


$c = aba$ е цикъл, който не е прост (съдържа реброто e два пъти), но прости цикли няма. Тоест, в неориентираните графи няма ограничение за дължините на пътищата, които не са непременно прости.

(Решението важи единствено за ориентирани ациклични графи)

Следователно всички елементи на M^n са нули и тяхната сума е нула, което е по-малко от $\sqrt{n}$ // $n \geq 1$ □

+ Решението важи ли, ако G беше неориентиран ацикличен граф? – НЕ

Контрапример: 

$M = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$, $M^2 = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}$ $\quad 2 \not< \sqrt{2}$

зад. Нека V е фиксирано м-во от върхове; различно от празното. (В текущия контекст се имат предвид именувани графи)

а) Колко са всички графи $G=(V,E)$?

– $2^{\binom{n}{2}}$

б) Колко са всички графи $\overbrace{}^{G=(V,E)}$ с възможни примки?

– $2^{\binom{n}{2}+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

в) Колко са всички графи $G=(V,E)$ с примки?

– $2^{\binom{n}{2}}$ // примките са задължителни - за тех нямаме избор

г) Колко са всички ориентирани графи $G=(V,E)$?

– $2^{n(n-1)}$

д) Колко са всички ориентирани графи $G=(V,E)$ с възможни примки?

– 2^{n^2}

// да се направи съпоставка с броя на релациите с определени свойства от вида $R \subseteq \{1,..n\} \times \{1,..,n\}$

зад. Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф с поне два върха, такъв, че

$$\forall u \in V, \forall v \in V: u \neq v \rightarrow (u,v) \in E \vee (v,u) \in E \quad (\Delta)$$

Да се докаже, че в G съществува хамилтонов маршрут, ~~такъв, че~~ (ориентиран път).

+ Какво щеше да означава (Δ), ако G не беше ориентиран?
+ Позволени ли са примки, ако гледаме само (Δ)?
+ Колко/Какви са силно/слабо свързаните компоненти на G?

ение:

С индукция по $n=|V|$, $n \geq 2$

1) База: $n = 2$

Тогава G съдържа точно два върха: u, v и, по дефиницията на G, точно едно от трите е в сила:

1сл) $(u,v) \in E \wedge (v,u) \notin E$

Има Хамилтонов път с дължина единица: $\overset{u}{\circ} \longrightarrow \overset{v}{\circ}$

2сл) $(u,v) \notin E \wedge (v,u) \in E$

Има Хамилтонов път с дължина единица: $\overset{u}{\circ} \longleftarrow \overset{v}{\circ}$

3сл) $(u,v) \in E \wedge (u,v) \in E$

Има два Хамилтонови пътя с дължина единица: $\overset{u}{\circ} \rightleftarrows \overset{v}{\circ}$

2) Индуктивно предположение:

Допускаме, че твърдението е вярно за всеки граф $\check{G}$, дефиниран по (Δ), с $n-1$ върха

3) Индуктивна стъпка:

Ще докажем твърдението за произволен граф $\check{G'}$, дефиниран по (Δ) с n върха.

Нека ~~озколкки~~ G е такъв граф от ИП, че G' се получава от G с добавяне на точно един нов връх, спрямо (Δ).

От индукционното предположение знаем, че в G има Хамилтонов път p. Нека H е тази част от графа $\check{G}$ (подграф на G), отговаряща на пътя p

H може да се представи:

$p: \underset{v_1}{\circ} \to \underset{v_2}{\circ} \to \underset{v_3}{\circ} \to \dots \to \underset{v_{n-2}}{\circ} \to \underset{v_{n-1}}{\circ}$

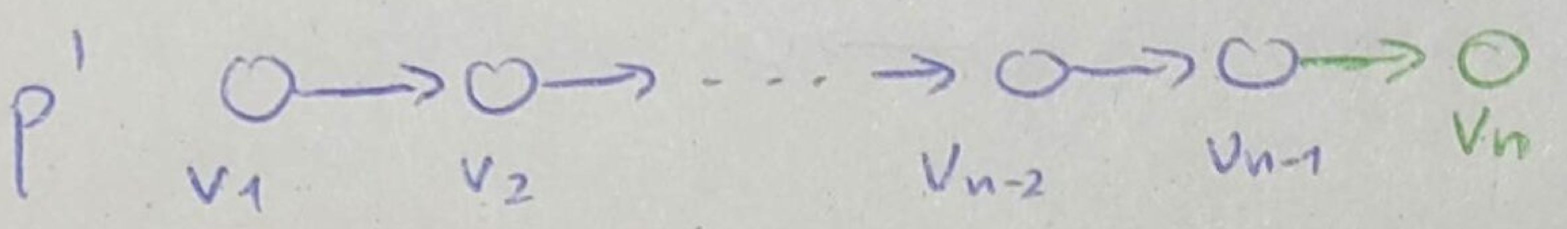
// върховете са именувани спрямо реда на появата им в Хамилтонов път p

От p-хамилтонов следва, че $v_i \neq v_j \ \forall i,j \in \{1,\dots,n-1\}: i \neq j$

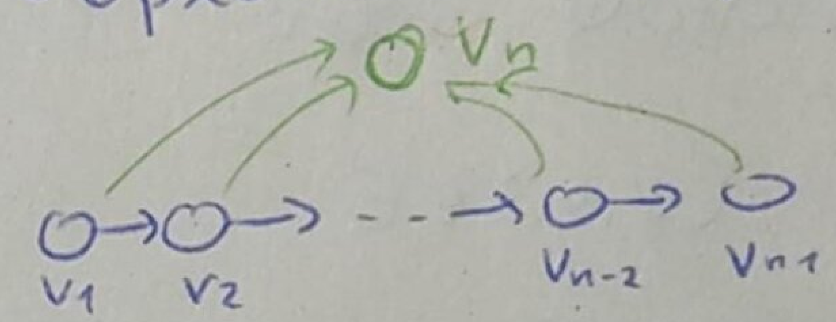
Тъй като G' се получава от G с добавяне на точно един нов връх v_n, спрямо (Δ). То между v_n и всеки връх от H ще съществува ребро (не е ясно в коя посока).

1сл) Неформално казано всички ребра между върховете на H "сочат" към v_n.
Тоест, G' е графът $G' = (V \cup \{v_n\}, E')$, $E' = E \cup \{(v_i, v_n) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup A$
Но тогава в G' съществува Хамилтонов път p', който се получава от p чрез добавяне в края на реброто (v_{n-1}, v_n) и върха v_n:

// A е множеството от останалите ребра м/у v_n и върховете $V \setminus V(H)$



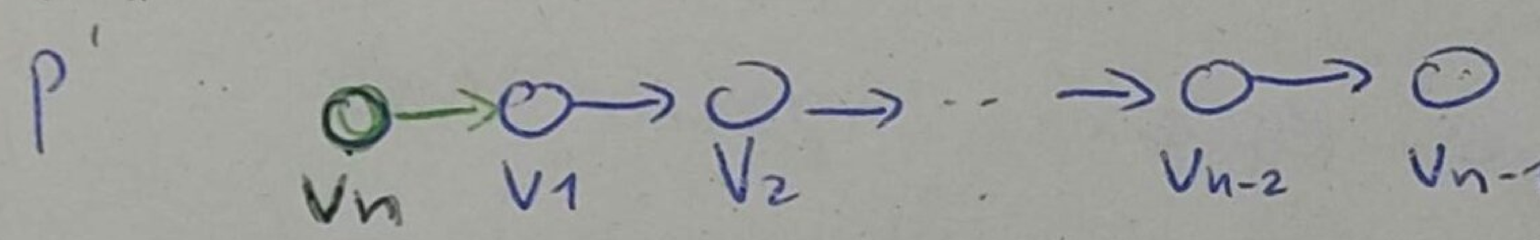
//



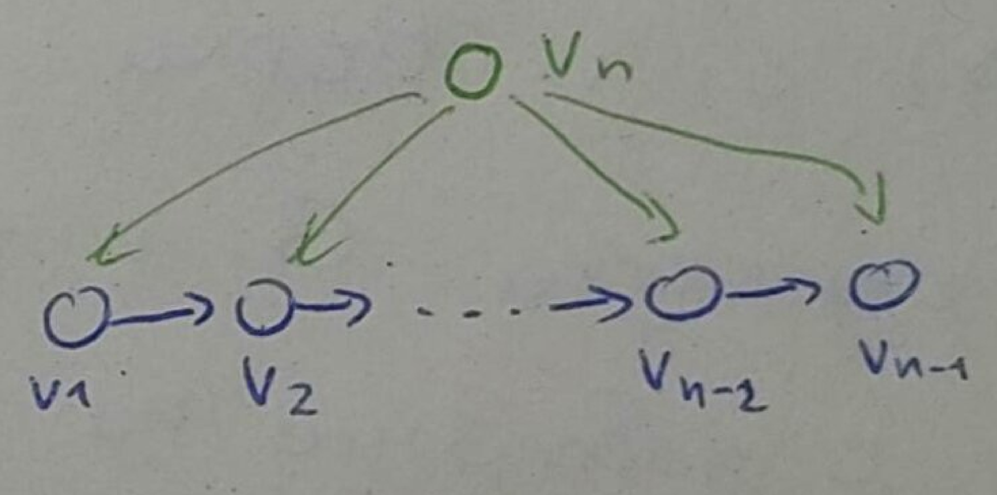
2сл) Неформално казано, всички ребра между върховете на H и върха v_n "излизат" от v_n.
Тоест, $G' = (V \cup \{v_n\}, E')$; $E' = E \cup \{(v_n, v_i) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup B$

// B е множеството от останалите ребра между v_n и върховете $V \setminus V(H)$

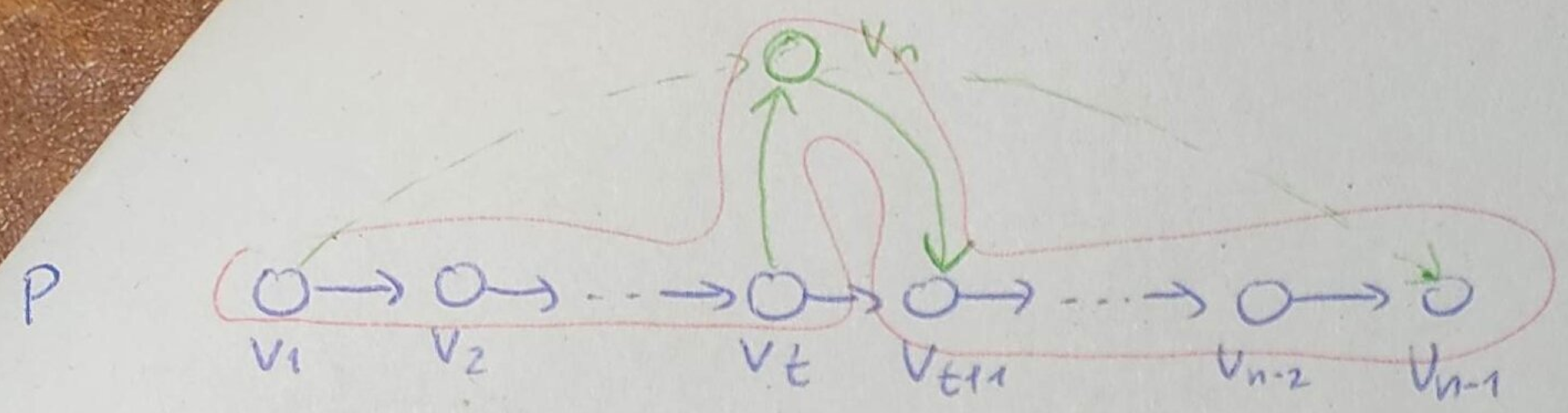
Но тогава в G' съществува Хамилтонов път p', който се получава от p чрез добавяне в началото реброто (v_n, v_1) и върха v_n:



//



3сл) Съществуват ребра (v_n, v_i) и (v_j, v_n) $(*)$ // ~~[illegible]~~ $v_i \neq v_j$
и не съществуват ребра (v_n, v_1) и (v_{n-1}, v_n) - в този случай може да конструираме p' по горните два случая.
Тоест, от $(*)$ и (Δ) следва, че $(v_1, v_n), (v_n, v_{n-1}) \in E(G')$
Нека v_t и v_{t+1} са първите два съседни върха по пътя p, такива, че $(v_t, v_n) \in E$ и $(v_n, v_{t+1}) \in E$. Такива има, тъй като $\exists (v_n, v_i), (v_j, v_n) \in E$ и, ако не съществуваха такива <u>съседни</u> (в пътя p) ребра, то всички ребра щяха да са от вида (v_n, v_i), $i \in \{1, \dots, n-1\}$ или от вида (v_i, v_n), $i \in \{1, \dots, n-1\}$



Тогава в G' съществува Хамилтонов път P' : $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_t \to v_n \to v_{t+1} \to \dots v_{n-2} \to v_{n-1}$