ДС Семинар № 14
Булеви функции

- Булева функция на n променливи е всяка функция от вида $f: J_2^n \to J_2$, за някое $n \geq 1$, където $J_2 \stackrel{def}{=} \{0,1\}$ и $J_2^n \stackrel{def}{=} \underbrace{J_2 \times J_2 \times \dots \times J_2}_{\# n}$

- Множеството от всички булеви функции на n променливи бележим с F_2^n, а м-вото от всички булеви функции с F_2. // $F_2 = \bigcup_{n \in N} F_2^n$

Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е булева функция. Ако $x_i \neq x_j$ $(i \neq j \in \{1, \dots, n\})$, то f е булева функция на n променливи, ако има имена на променливи, които се повтарят, то f е б. ф-я на $< n$ променливи.
↳ идентифицирани променливи

- Променлива x_i се нарича фиктивна, ако
$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$ за всяка валюация на останалите $n-1$ променливи

зад 1 Колко са всички булеви ф-ции на n променливи?
Решение: Булевите ф-ции на n-променливи са от вида
$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, а ние знаем, че има 2^{2^n} такива ф-ции.

зад 2 Колко са всички булеви функции? (на $n \geq 1$ променливи)
Решение: Броят им е $\sum_{n \in N^+} 2^{2^n}$

• Представяне на булеви функции

Нека x_1 и x_2 са булеви променлива и f е булева функция на 2 променливи, такава че f "дава" стойността 0 за всяка валюация на x_1 и x_2 (f е константата 0).

Може да опишем f чрез таблица:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Може да опишем f канонично:

(валюацията на променливите тр. да е подредена лексикографски)

$f = 0000$

• Булеви функции на една промелива:

Булевите функции на една променлива са следните:

1) $f_0(x)$ – константата нула, означава се с $\tilde{0}$

2) $f_2(x)$ – отрицанието на x: $\bar{x}$

3) $f_1(x)$ – идентитетът на x: x

4) $f_3(x)$ – константата единица, означава се с $\tilde{1}$

Функциите f_0 и f_3 не зависят от променливата x.

Може да опишем горните функции чрез таблица:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

те са на брой 2^{2^1}

Може да опишем горните функции канонично:

$f_0 = 00$

$f_1 = 01$

$f_2 = 10$

$f_3 = 11$

- **Булеви функции на две променливи**

Булевите функции на две променливи са 2^{2^2} на брой и са следните:

1) $f_0(x,y) = \tilde{0}$
2) $f_1(x,y) = x \wedge y$
3) $f_2(x,y) = x \wedge \bar{y}$
4) $f_3(x,y) = x$ - идентитетът на x
5) $f_4(x,y) = \bar{x} \wedge y$
6) $f_5(x,y) = y$ - идентитетът на y
7) $f_6(x,y) = x \oplus y$ - сума по модул 2
8) $f_7(x,y) = x \vee y$
9) $f_8(x,y) = x \downarrow y$ - стрелка на Пирс
10) $f_9(x,y) = x \equiv y$ - еквивалентност
11) $f_{10}(x,y) = \bar{y}$
12) $f_{11}(x,y) = y \rightarrow x$ - обратна импликация
13) $f_{12}(x,y) = \bar{x}$
14) $f_{13}(x,y) = x \rightarrow y$
15) $f_{14}(x,y) = x | y$ - черта на Шефер
16) $f_{15}(x,y) = \tilde{1}$

Може да опишем горните функции чрез таблица:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Може да опишем горните функции канонично:

f_k = -двоичното представяне на числото k - // с $2^{\#\text{брой промен-ви}}$ цифри.

• В сила са следните свойства на функциите на две променливи

1) Комутативност

$xy = yx$

$x \vee y = y \vee x$

$x \oplus y = y \oplus x$

2) Асоциативност

$(xy)z = x(yz)$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

3) Дистрибутивност

$x(y \vee z) = xy \vee xz$

$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$

4) Идемпотентност

$xx = x$

$x \vee x = x$

$x \oplus x = \tilde{0}$

5) Свойства на отрицанието

$x\bar{x} = \tilde{0}$

$x \vee \bar{x} = \tilde{1}$

$x \oplus \bar{x} = \tilde{1}$

$\bar{\bar{x}} = x$

6) Свойства на константите

$x\tilde{0} = \tilde{0}$

$x\tilde{1} = x$

$x \vee \tilde{0} = x$

$x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$

$x \oplus \tilde{0} = x$

$x \oplus \tilde{1} = \bar{x}$

7) Закони на Де Морган

$\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$; $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

Зад ③ Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които имат стойност 1 точно върху k елемента от домейна.

Решение:

Тъй като кодомейна е $\{0,1\}$, то избирайки k вектора (елемента от домейна), върху които функцията да връща стойност 1, то за останалите $2^n - k$ елемента от домейна функцията връща 0 (еднозначно е определена от избора на тези k вектора).

Тези k вектора може да изберем по $\binom{2^n}{k}$ начина, което е и отговорът на задачата.

Зад ④ Да се намери броя на симетричните булеви ф-ции на n промен-ви.

Решение:

// Функцията f е симетрична, ако стойността ѝ се запазва при всяка пермутация на променливите

Например, нека $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е симетрична. Тогава $f((1,2)) = f((2,1))$ например.

Нека въведем релацията $Perm \subseteq J_2^n \times J_2^n$, ~~което съдържа~~ където

~~$\forall a,b \in J_2^n$: $a\,Perm\,b$, тстк a и b имат~~

$\forall a,b \in J_2^n$: $a\,Perm\,b$ тстк a и b имат равен брой единици.

Ако $a \in J_2^n$ има k на брой единици, то $\forall b \in J_2^n$: $a\,Perm\,b$ е в сила, че b е пермутация на a. Следователно симетричната функция f ще има една и съща стойност в/у a и тези b в-ри.

$Perm$ е релация на еквивалентност (за упр - да се провери) и ф-та f ще има една и съща стойност $\xrightarrow{\text{0 или 1}}$ върху всеки елемент на даден клас на еквивалентност. Следователно, броят такива функции е

$2^{\#\text{брой класове на екв.}}$

Какво са тези класове на еквивалентност?

тези класове на еквивалентност отговарят биективно на мултимножествата с кардиналност n над опорното множество $\{0,1\}$.
Ние знаем, че те са $\binom{(2-1)+n}{2-1} = \binom{n+1}{1} = n+1$ на брой.

Тоест, броят на тези функции е 2^{n+1}.

// Задачата може да се реши и по-лесно - без въвеждането на релацията Perm, а само чрез съобразяване, че броят на тези ф-ции е $2^{\#\text{брой в-ри с различен брой единици}}$ и намиране на този

бройка вектори

зад ⑤ Да се определи броят на булевите функции на n променливи за $n \geq 2$, които запазват стойността си при размяна на променливите x_1 и x_2.

Решение:

Ще намерим броя различими вектори в контекста на задачата.

Например, ако онагледим векторите по следния начин:

$(x_1, x_2, \dots,)$, то векторите

$(x_1, x_2, \dots, \dots)$ и $(x_2, x_1, \dots)$ са неразличими.

Разглеждаме единствено стойностите на променливите x_1 и x_2 (тяхната валюация):

$(x_1, x_2, \dots)$:

$(0, 0, \dots)$

$(0, 1, \dots)$

$(1, 0, \dots)$

$(1, 1, \underbrace{\dots}_{n-2})$

Различимите валюации на x_1 и x_2 в контекста на задачата са точно 3: 1) $x_1=0$, $x_2=0$, 2) $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_1=1$, $x_2=0$,

3) $x_1=1$, $x_2=1$

За всяка такава различна валюация на x_1 и x_2 съществуват 2^{n-2} различни валюации на останалите $n-2$ променливи.

Следователно броят на различните вектори е $2^{n-2} \cdot 3$, а броят на търсените функции – $2^{2^{n-2} \cdot 3}$

• Формули

- формула е синтактично понятие
- формула е всеки стринг, конструиран над дадена азбука съгласно дадени правила

Определение на формула на булева функция – в записките от лекции

Всяко от следващите понятия е формула:

• литерал – име на променлива или име на променлива с черта отгоре (променливите са булеви)

• конюнктивна клауза – всяка непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива, че всяко име на променлива се появява най-много веднъж.

• пълна конюнктивна клауза – конюнктивна клауза, съдържаща точно n литерала

• дизюнктивна нормална форма/ДНФ е формула, състояща се от една или повече различни конюнктивни клаузи, свързани със символа "v"

- съвършена дизюнктивна нормална форма/СДНФ е дизюнктивна нормална форма, в която участват само пълни конюнктивни клаузи

зад. 6 Колко е броят на дизюнктивните нормални форми над променливите $x_1, \dots, x_n$?

Решение:

ДНФ се състои от конюнктивни клаузи над променливите $x_1, \dots, x_n$.

Колко са всички възможни такива КК?

Може да мислим за КК като стринг-вектор от символи с дължина n и всяка позиция i от вектора съответства на променливата x_i - тя може да не участва, да участва или да участва с отрицание, тоест за всяка позиция в този стринг имаме по 3 възможности. Позициите са n на брой, следователно броят КК е $3^n - 1$.

(вадим -1, тъй като премахваме случая когато всички не участват - стрингът е празен, понеже КК са непразни формули.)

// Съществено е, че КК се пишат в нарастващ ред на индексите на променливите.

ДНФ се изгражда от тези КК - всяка конюнктивна клауза може да участва или да не участва, откъдето броят на ДНФ е

$$2^{3^n - 1} - 1$$

(тук отново премахваме 1, тъй като ДНФ не може да е празна - има поне една клауза (премахваме единствения случай, в който всички КК не участват)).

зад 7 Колко е броят на съвършените дизюнктивни нормални форми/СДНФ над променливите $x_1, \dots, x_n$?

Решение:

Разсъжденията са подобни на зад. 6 с разликата, че СДНФ се състои от пълни конюнктивни клаузи, тоест всяка променлива участва в КК - като себе си или като отрицанието си.

Следователно, броят на пълните КК е 2^n, а СДНФ се състои от някои (не е задължително да са всички) от тези клаузи, тоест всяка пълна КК може да участва или да не участва в СДНФ, откъдето отговорът е $2^{2^n} - 1$

↳ броят е с единица по-малко от броя на всички булеви функции на n променливи, което съответства на твърдението, че всяка булева функция без $\tilde{0}$ има точно една СДНФ, на която е семантика.

• Затваряне на множество спрямо операции

Нека $F \subseteq F_2$ подмножество булеви функции.

Индуктивна дефиниция на затварянето на F спрямо композиция - $[F]$

1) $F \subseteq [F]$

2) Нека $f \in [F]$ е n-местна, $n \geq 1$. Нека f' се получава от f след идентифициране на някои от променливите на f. Тогава $f' \in [F]$

3) Нека $f, g \in [F]$ и f е n-местна, $n \geq 1$. Нека f' се получава от f след композицията на g на мястото на i-тата променлива на f, $1 \leq i \leq n$. Тогава $f' \in [F]$

• Пълно множество от булеви функции

Деф. Множеството $F \subseteq F_2$ е пълно, ако $[F] = F_2$

· Дефинираме функцията $f(x, \alpha) = x^\alpha$:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

· Спрямо горната дефиниция е в сила:

$x^\alpha = 1$ тстк $x = \alpha$ и в по-общия случай:

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} = 1$ тстк $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_k = \alpha_k$. (Δ)

· Разлагане на булева функция по i променливи

Нека f е булева функция и са избрани i от променливите на f.
БОО, нека това са първите i променливи. Тогава е в сила:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\bigvee_{\forall \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}_{(*)}$$

// $\bigvee_{\forall \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i}$ е обобщена ~~конюнкция~~ дизюнкция, която се изпълнява за всички булеви вектори $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$, които са 2^i на брой.

Доказателство:

Нека с $g(x_1, \dots, x_n)$ означим функцията (*)

Нека $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in J_2^n$ е произволен булев вектор на n пром-ви.

Ще докажем, че $f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$. От това ще следва исканото твърдение.

От (Δ) следва, че $a_1^{\alpha_1} \dots a_i^{\alpha_i}$ ще има стойност 1 точно за един булев вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, а именно $(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = (a_1, \dots, a_i)$

Следователно точно един член на обобщената дизюнкция ще има стойност 1, а останалите ще имат стойност 0.

Следователно $g(a_1, \dots, a_n) = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_i^{a_i} f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \vee \breve{0} = \breve{1} f(a_1, \dots, a_n)$, с което доказахме исканото твърдение.

- Теорема на Джордж Бул
  Множеството от трите булеви функции - конюнкция, дизюнкция и отрицание е пълно.
  // $\{\wedge, \vee, -\}$ е пълно.

Доказателство:
Ще докажем, че $\forall f \in F_2 : f \in [\{\wedge, \vee, -\}]$, тоест, че може да представим f като формула над $\{\vee, \wedge, -\}$.

1сл) $f = \tilde{0}$
Тогава $f(x) = x\bar{x}$ // $(x \wedge \bar{x})$

2сл) $f = \tilde{1}$
Тогава $f(x) = x \vee \bar{x}$.

3сл) $f \neq \tilde{1}$ и $f \neq \tilde{0}$ и $n \geq 1$

Нека разложим f по n-те ѝ променливи:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad (\square)$$

Ако $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ за конкретния булев вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то този член на който обобщената дизюнкция може да не участва, (тъй като $x \vee \tilde{0} = x$).

Ако $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ за конкретния булев вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ и тогава $(\square)$ става:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\forall \alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

, което дясна страна на равенството е формула на f над $\{\wedge, \vee, -\}$ $\square$.

- Теоремата на Бул ни дава явен вид на конкретната формула на булева функция f.
  Когато $f \neq \tilde{0}$, формулата ~~е~~ е точно СДНФ на f. !

• Пример.

Ще използваме формулата ~~от~~ Th. Бул, за да съставим СДНФ на $f(x,y) = x \vee y$. и $f_\to(x,y) = x \to y$

Нека направим таблицата на f и $f_\to$:

x	y	f	$f_\to$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Формулата от Th. Bool ще изглежда по следния начин:

$$f(x,y) = x^0y^0\overbrace{f(0,0)}^{0} \vee x^0y^1\overbrace{f(0,1)}^{1} \vee x^1y^0\overbrace{f(1,0)}^{1} \vee x^1y^1\overbrace{f(1,1)}^{1} =$$

$$= 0 \vee x^0y^1 \vee x^1y^0 \vee x^1y^1 = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xy. =: B$$

$$f_\to(x,y) = x^0y^0 f_\to(0,0) \vee x^0y^1 f_\to(0,1) \vee x^1y^0 f_\to(1,0) \vee x^1y^1 f_\to(1,1) =$$

$$= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy \; \boxed{=: A}$$

Нека сравним получените формули - СДНФ с първоначалните функции: $\vee$ и $\to$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	xy	A	B
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Получените СДНФ точно отговарят на функциите.

По-неформално казано, СДНФ на f може да се състави, гледайки стълба на таблицата на f: Пропускаме редовете където f има стойност 0, разглеждаме редовете, където f има стойност 1 - колкото са тези редове, толкова участници в обобщената дизюнкция ще има, като всеки участник е КК - конкатенация на n-те променливи от конкретния ред, който разглеждаме, като всяка променлива в тази КК участва като отрицание, ако има стойност 0 и участва без отрицание, ако има стой. 1.