ДС Семинар № 1

Съждителна и предикатна логика

Съждителна логика

· Деф. Просто съждение – просто разказвателно изречение, което е или истина, или лъжа. /лог. променлива // T/истина/1 ; F/лъжа/0

· Логически съюзи

Нека p, q са съждения

p	q	p ∨ q	p ∧ q	p ⊕ q	p → q	p ⟷ q	¬p
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0

+ 2^n реда при n-променливи

· p∨q ; p∧q ; p⊕q ; p→q , p⟷q , ¬p – съставни съждения. Те се образуват от прости съждения, други съставни съждение и логически константи чрез логически съюзи.

1) Негация

Може да се срещне и като ¬p ; -p ; $\bar{p}$; !p
Формира ново съждение от друго такова
Едноместна операция

2) Конюнкция – "и" – Истина, тстк всички участващи съждение са истина

3) Дизюнкция – "или"
- Истина тогава и само тогава, когато поне едно от ~~всички~~ участващите съждение са истина

4) Изключващо или
- Истина тстк точно едно от двете участващите съждение е истина и лъжа в противен случай

4) Импликация "$\Rightarrow$" - ако p, то q. Още p, само ако q
тъй като от p следва q

p се нарича антецедент, q - консеквент

p е свързан с достатъчността, а q с необходимостта (не може p да е истина, а q - лъжа импл-та е истина)

Липсва причинно-следствена връзка, за разлика от конструкцията "ако, ..., то..." от естествения език.

5) Би импликация "$\Leftrightarrow$" = p тогава и само тогава, когато q

$p \Leftrightarrow q$ е съставно съждение, което е истина тстк p и q имат еднаква логическа стойност

- Приоритет на логическите съюзи (от най-висок към най-малък)

1) $\neg$
2) $\wedge$
3) $\vee$
4) $\rightarrow$
5) $\leftrightarrow$

Неформално правило е едноместните оператори да са с по-висок приоритет от двуместните.

Пример: $p \wedge \neg p \vee q \rightarrow r$ има смисъл на $[[p \wedge (\neg p)] \vee q] \rightarrow r$

Тавтология е съставно съждение, чиято стойност е T(1) за всяка валюация на съставящите го прости съждения.

Противоречие...

Определение:

Нека x, y са съждение. x и y са еквивалентни тстк съждението $x \leftrightarrow y$ е тавтология. Пишем $x \equiv y$ / $x \Leftrightarrow y$

Задача. Докажете чрез таблица на истинност, че следните са еквивалентни:

1) $p \rightarrow q$ и $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

$p \vee (p \wedge q)$ и p

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

3) $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Задача 2 Да се посочи кои от следните са тавтологии/противоречия/условности

1) $p \wedge \neg p$

2) $p \vee \neg p$

3) $(p \wedge q) \to p$

4) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

5) $(p \to p \wedge \neg p) \wedge p \wedge (p \vee q)$

Втори начин за установяване на еквивалентности е чрез еквивалентни преобразувания.
Наготово (освен, ако не е посочено друго) може да се използват следните еквивалентности:

Нека p, q, r са произволни съждения.

1) Свойства на константите: $p \wedge T \equiv p$; $p \wedge F \equiv F$; $p \vee T \equiv T$; $p \wedge T = p$

2) Свойства на отрицанието: $p \wedge \neg p \equiv F$; $p \vee \neg p \equiv T$

3) Идемпотентност: $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$

4) Закон за двойното отрицание: $\neg(\neg p) \equiv p$

5) Комутативност: $p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$

6) Асоциативност: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

7) Дистрибутивност: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

8) Закони на Де Морган: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$; $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

9) Поглъщане: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$; $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

10) Свойство на импликацията: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

11) Свойство на би-импликацията: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Задача 3 Да се докажат еквивалентностите чрез еквивалентни преобразувания:

1) $p \to q$ и $\neg q \to \neg p$

$p \to q \equiv$ (св-во на имп.)

$\neg p \vee q \equiv$ (комутативност)

$q \vee \neg p \equiv$ (закон за двойното отрицание)

$\neg(\neg q) \vee \neg p \equiv$ (св-во на имп. (в обратната посока))

$\neg q \to \neg p$ $\square$

2) $p \vee q \equiv \neg p \to q$

$p \vee q \equiv$ (закон за двойното отрицание)

$\neg(\neg p) \vee q \equiv$ (св-во на импликацията)

$\neg p \to q$

3) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

$(p \vee q) \to r$ (св-во на имп.)

$\neg(p \vee q) \vee r \equiv$ (Де Морган)

$(\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv$ (дистрибутивност)

$(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv$ (св-во на имп.)

$(p \to r) \wedge (q \to r)$ $\square$

4) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$p \leftrightarrow q \equiv$ (св-во на би-имп.)

$(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv$ (св-во на имп.)

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \equiv$ (дистрибутивност)

$[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \vee [(\neg p \vee q) \wedge p] \equiv$ (дистрибутивност)

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge q)] \vee [(\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)] \equiv$ (свойства на отрицанието)

$(F \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (F \vee (q \wedge p)) \equiv$ (св-ва на константите)

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

За упр: 5) $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$ (Доказвате, че $\neg p \leftrightarrow \neg q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ и от 4) следва, че $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$)

$(p\to q)\vee(p\to r)\equiv p\to(q\vee r)$

7) $(p\to r)\vee(q\to r)\equiv(p\wedge q)\to r$

8) $\neg(p\leftrightarrow q)\equiv p\leftrightarrow\neg q$

9) $(p\to q)\wedge(p\to r)\equiv p\to(q\wedge r)$

Зад 4. Да се докаже, че съждението $(p\to p\wedge\neg p)\wedge p\wedge(p\vee q)$ е противоречие чрез екв. преобр.

$(p\to p\wedge\neg p)\wedge p\wedge(p\vee q)\equiv$ (св-ва на отрицанието)

$(p\to F)\wedge p\wedge(p\vee q)\equiv$ (св-во на импликацията)

$(\neg p\vee F)\wedge p\wedge(p\vee q)\equiv$ (св-во на константите)

$\neg p\wedge p\wedge(p\vee q)\equiv$ (асоциативност)

$F\wedge(p\vee q)\equiv$ (св-во на константите)

F → съждението не зависи от променливите

За упр. Да се докаже, че ~~съждението~~ $(p\wedge q)\to(p\vee q)\equiv T$, тоест, че съждението е тавтология, използвайки табличен метод и използвайки екв. пр.

Предикатна логика

Предикатната логика е по-силна от съждителната. Описва по-голямо множество от твърдения.

Определение: Едноместен предикат е съждение, в което има "празно място", в което място се слага обект от предварително зададена област, наречена домейн. За всеки обект от домейна, предикатът е или истина, или лъжа.

Нека A е множество. Едноместен Предикат с домейн A означаваме с $P(x)$, където x заема стойности от A.

Само $P(x)$ не е нито истина, нито лъжа.

Пример за предикат: ... е просто число , с домейн ...

:

→ още се среща съждителна ф-ция

Означаваме го с $P(x)$.

Има два начина да "превърнем" предикат в съждение, което има булева стойност:

1) Задаваме конкретна стойност на x. Например $P(2)$ е истина, а $P(6)$ е лъжа

2) Прилагаме квантори

$\exists x P(x)$ има смисъл на "съществува $x \in A$-домейна, за което $P(x) \equiv T$"

$\forall x P(x)$ има смисъл на "за всяко $x \in A$-домейна е изпълнено $P(x)$"

$\exists$ - екзистенциален квантор. Свързан с дизюнкцията

$\forall$ - универсален квантор. Свързан с конюнкцията

Нека домейнът е $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

Тогава $\exists x P(x)$ има смисъл на $P(a_1) \vee \dots \vee P(a_n)$

$\forall x P(x)$ има смисъл на $P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n)$

$\exists x P(x) \equiv F$, ако $\forall x \neg P(x) \equiv T$

$\forall x P(x) \equiv F$, ако $\exists x \neg P(x) \equiv T$. Такова $x \in A : P(x) = F$ се нарича контрапример за $P(x)$

$\exists x P(x) = T$, такова $x : P(x) = T$ се нарича свидетел за $P(x)$

Значението на $\exists x$ и $\forall x$ зависят от домейна. Изразите $\forall x P(x)$ и $\exists x (P(x))$ нямат смисъл, ако не сме посочили домейна

Забележка. Нека $A = \emptyset$ е домейн и $P(x)$ е предикат с домейн A. Тогава

$\forall x P(x) \equiv T$ - влп тъй като $\forall x \in S (P(x)) \equiv \forall x (x \in S \to P(x))$ - антецедентът винаги е лъжа импликацията е винаги истина

$\exists x P(x) \equiv F$ $\quad \exists x \in S (P(x)) \equiv \exists x (\underbrace{x \in S}_{\text{винаги лъжа}} \wedge P(x))$

Съждение	Кога е истина	Кога е лъжа
$\forall x P(x)$	$P(x)$ е T за всяко $x \in A$	Съществува $x : P(x) = F$
$\exists x P(x)$	$P(x)$ е T за някое $x \in A$	$P(x)$ е F за всяко $x \in A$

...а и други видове квантори като $\exists!$ - съществува единствено

$\exists! P(x)$ - има уникално x, такова че $P(x)$ е истина

Квантори с ограничени домейни:

Пример:

$(\forall x<0)(x^2>0) \equiv \forall x(x<0 \to x^2>0)$ При $\forall$ имаме импликация

$(\exists z>0)(z^2=2) \equiv \exists z(z>0 \land z^2=2)$ При $\exists$ имаме конюнкция

Кванторите имат най-голям приоритет.

$\forall x P(x) \land Q(x) \equiv [\forall x P(x)] \land Q(x)$ -

Отрицание на в предикатната логика

$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$ $(\neg(P(a_1) \land \ldots \land P(a_n)) \equiv \neg P(a_1) \lor \ldots \lor \neg P(a_n) \equiv \exists x \neg P(x))$

$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$ $(\neg(P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_n)) \equiv \neg P(a_1) \land \ldots \land \neg P(a_n) \equiv \forall x \neg P(x))$

Следните св-ва са в сила:

разгрупване, тва и ползване асоциативност на $\land$: $Q(a_1) \land P(a_1)$

$\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x \cancel{P}Q(x) \land \forall x P(x)$ - дистрибутивност на $\forall$ спрямо $\land$

$\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x(P(x)) \lor \exists x(Q(x))$ имат един и същи домейн

разгрупване

Задача ① Да се намери $\neg(\forall x(x^2>x))$ и $\neg(\exists x(x^2=2))$

$\neg(\forall x(x^2>x)) \equiv \neg\forall x(x^2>x) \equiv \exists x \neg(x^2>x) \equiv \exists x(x^2 \leq x)$

$\neg(\exists x(x^2=2)) \equiv \neg\exists x(x^2=2) \equiv \forall x \neg(x^2=2) \equiv \forall x(x^2 \neq 2) \equiv \forall x(x^2<2 \lor x^2>2)$

\+ Какви са булевите стойности на 1) $\forall x(x^2>x)$ и 2) $\exists x(x^2=2)$

Отг: Зависи от домейна. При $\mathbb{R}$ 2) е T, при $\mathbb{N}$ е F

Задача ② Да се докаже, че $\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

$\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x \neg(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x(\neg(\neg P(x) \lor Q(x))) \equiv$

$\equiv \exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

Задача от Сем. контролно 2019.

а) Дефинирайте "еквивалентност на съждения"

б) Нека $n \geq 2$ и $p_1, \dots, p_n$ са прости съждения, две по две различни.

Нека $A = \{p_1, \dots, p_n\}$. Нека B е м-вото от всички възможни съставни съждения, които се изграждат от ел-тите на A чрез познатите логически връзки. Нека $Q(x, y)$ е двуместен предикат, чийто два домейна са $A \cup B$, дефиниран така: "$Q(x, y)$ е истина тогава и само тогава, когато x и y са еквивалентни". Верни ли са следните.

1) $\exists x \in A. \exists y \in A: x \neq y \land Q(x, y)$

- НЕ, няма как две различни прости съждение да са еквивалентни. Може да се види чрез таблица на истинност

2) $\exists x \in B \ \exists y \in B: x \neq y \land Q(x, y)$

- ДА, свидетели са например $\overset{x}{\neg(p_1 \land p_2)} \equiv \overset{y}{\neg p_1 \lor \neg p_2}$

3) $\exists x \in A \ \exists y \in B: x \neq y \land Q(x, y)$

- ДА, свидетели са например p_1 и $p_1 \lor (p_1 \land p_2)$

4) $\exists x \in B \ \exists y \in A: x \neq y \land Q(x, y)$

- ДА, може да разместваме еднаквите квантори помежду си. Същите свидетели

в) Нека p, q, r са съждение. Използвайки еквивалентни преобразувания, д-те следните еквивалентности:

1) $(p \land q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

$(p \land q) \to r \equiv$ (св-во на импликацията)

$\neg(p \land q) \lor r \equiv$ (закон на Де Морган)

$(\neg p \lor \neg q) \lor r \equiv$ (асоциативност)

$\neg p \lor (\neg q \lor r) \equiv$ (св-во на импликацията)

$p \to (\neg q \lor r) \equiv$ (св-во на имп.)

$p \to (q \to r)$

2) $(p \lor q) \to r \equiv (p \to r) \land (q \to r)$ - за упр

$(p \lor q) \to r \equiv (\neg p \land \neg q) \lor r \equiv (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r) \equiv (p \to r) \land (q \to r)$