ДС. Семинар 2
Множества

- Конвенция.

  Множество е първично понятие

- Примери за мн-ва:

  $\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $[a,b]$; множеството от всички студенти във ФМИ

- Няколко начина за представяне на м-ва

1) Изреждане всички елементи (когато са обозримо малък брой)

   $A = \{a, b, c, d\}$

2) Чрез свойство/свойства над A (предикат)

   $A = \{x \mid x$ има свойството $P\}$

Пример: $A = \{x \mid x$ е четно (цяло положително число) и $x < 10\} \equiv A = \{x \in \mathbb{Z}^{+} \mid x$ е четно и $x < 10\}$

$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}$ и $q \neq 0\}$ – рационалните числа

- Интуитивно мислим за м-вата като да съдържат подобни елементи, но нищо не пречи да имаме подобно м-во.

  $A = \{$Иван, 2, ФМИ, $\{a\}\}$

- Интервали

  $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$; ако $^{+}$ $b < a$: $[a,b] = ?$

- Ми-ва могат да съдържат както протоелементи, така и други ми-ва

  Пример: $A = \{\{a,b\}\}$, $B = \{a,b\}$, $A \neq B$

- Празното м-во: "$\emptyset$" – няма елементи ; "$\{\}$"

  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

- Мн-во, съдържащо един единствен елемент се нарича синглетон

- Аксиоми   // $A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x (x \in A \to x \in B))$!

1) Аксиома за обема – казва ни кога две м-ва са равни

   Две м-ва са равни тстк съдържат едни и същи елементи

   $\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$ – да се разпише чрез контрапозиция $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

м-во е

2) Аксиома за отделянето

Ако X е м-во и P(y) е предикат с домейн X, то

$B = \{ a \in X \mid P(a) \}$

$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow P(z))$

+ ако $\forall a\, P(a) \equiv T$, то $B = ?$

$\neg \exists a\, P(a) \equiv T$, то $B = ?$

3) Аксиома за степенното м-во

За всяко м-во X съществува м-во от вс. негови подмножества, което наричаме степенното м-во на X

$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow z \subseteq X)$

+ $A = \{a, \{a, b\}, b\}$

$a \in A$?

$b \in A$?

$\{a, b\} \in A$?

$\{a, b\} \subseteq A$?

$\{a\} \in A$?

Пример:

$A = \{a, b\}$, тогава $2^A \overset{?}{=} \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Друг начин, по който може да мислим

Нека $A = \{a_1, a_2\}$ - в м-вата няма наредба, но изброявайки елементие $\underbrace{a_1, \dots, a_n}$ → имплицитно въвеждаме такава

Всеки елемент е еднакво възможно да бъде първи изброен

Разглеждаме булевите в-ри с дължина n: (в нашия случай 2)

a_1	a_2
0/1	0/1

Тогава "i"-тата позиция съответства на елемента a_i

Тогава всеки такъв булев вектор v_i^* $\underbrace{\text{съответства}}$ подмножество на A V_i

Взимаме произволен такъв булев в-р: V_k ; $0 \leq k \leq 2^n - 1$. k е числото съответстващо на двоичното число представено - V_k

$V_k[i] = 1 \rightarrow a_i \in V_k$

$V_k[i] = 0 \rightarrow a_i \notin V_k$

! За всяко м-во A е в сила:

1) $A \subseteq A$

2) $\emptyset \subseteq A$.

$\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$

↳ винаги е лъжа ⇒ импликацията е винаги истина → $\emptyset \subseteq A$

$A \subset B \leftrightarrow (\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \times \exists x (x \in B \wedge x \notin A) \equiv T$

В примера векторите са:

1. V_1 $\begin{array}{|c|c|} a_1 & a_2 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ → $\emptyset$
2. V_2 $\begin{array}{|c|c|} a_1 & a_2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ → $\{a_2\}$
3. V_3 $\begin{array}{|c|c|} a_1 & a_2 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$ → $\{a_1\}$
4. V_4 $\begin{array}{|c|c|} a_1 & a_2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ → $\{a_1, a_2\}$

Булевите в-ри с дължина n са 2^n на брой, следователно всички подмножества на дадено м-во са 2^n на брой.

Тези в-ри още се наричат характеристични. ↳ Да се забележи, че това важи и за празното м-во: $\emptyset$ при $n = 0$, то $2^0 = 1$, тоест $2^\emptyset = \{\emptyset\}$

ардиналност/ Мощност

Интуитивно мощността на A е броят на различните елементи~~те~~ в A

Бележим с $|A|$.

Пример: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$; $|A| = 3$

Ако $|A| = n < \infty$, то A е крайно м-во

Ако A не е крайно, то A е безкрайно

Нека A и B са мн-ва:

Операции с A и B:

1) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4) $A \Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$
5) $\overline{A}^{U} = \{x \mid x \notin A\}$ - допълнението на A до някое друго м-во/универсум

- Наредена двойка

(a,b) - a е първи елемент, b е втори

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

$(a,b) \neq (b,a)$, ако $a \neq b$

$(a,b) = (c,d)$ тстк $a = c \wedge b = d$

6) Декартово произведение

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Пример: $\mathbb{R}$ → описва точките от реалната права

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ - описва точките в равнината

+ $A \times \emptyset = ?$

$\emptyset \times A = ?$

Може да мислим, че $\emptyset$ с операцията $\times$ е като 0 с операция умножение.

ако $A \neq B$ и $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то $A \times B \neq B \times A$

Контрапозицията: ако $A \times B = B \times A$, то $A = B$ или $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$

$(A \times B) \times C \neq A \times B \times C$

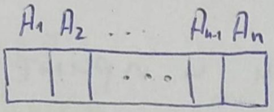
Операциите, представени в таблица:

A	B	$A\cup B$	$A\cap B$	$A\setminus B$	$A\Delta B$	$\overline{A}$
0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0

→ "хващаме" $\underbrace{\text{произволен}}$ елемент a и гледаме, ако прина- . . .

↳ + Колко са районите в диаграмата на Вен при n-м-ва.

2^n -



; $A_1, \dots, A_n$ - м-ва

↳ булеви в-ри. Хващаме елемент a.

Булевият в-р $\underbrace{00\dots00}_{\#n}$ "ни казва", че a не принадлежи на всяко от $A_1, \dots, A_n$.

Аналогично, булевият в-р $\underbrace{00\dots01}_{\#n}$ "ни казва", че a принадлежи единствено на A_n.

В-ят в-р $\underbrace{00\dots11}_{\#n}$ "ни казва", че a принадлежи единствено на A_{n-1} и A_n.

Всички тези в-ри са 2^n и представлеват вс възможности~~те~~ за един елемент да принадлежи на м-вата $A_1, \dots, A_n$

Задача от семестриално контролно 2019

→ тук чрез екв. преобразу- ване имаше как да стане, тъй като в общия случай не е вярно

Дкд, че ако $\forall x(x\in A \to x\in C \wedge x\notin B)$, то $\overline{\overline{B}\cap\overline{C}}\setminus B = \overline{B}\cap(C\cup A)$

Решение:

! Да се определи приоритета $\forall x(x\in A\to(x\in C\wedge x\notin B)) \equiv \forall x(x\in A\to(x\in C\setminus B))$

$\equiv A\subseteq C\setminus B$

↳ ако x е в A, то x задължително е в C и x не е в B

За да докажем, че две м-ва $_{A,B}$ са равни, то тр. да докажем:

1) $A\subseteq B$ може и да се
2) $B\subseteq A$ докаже чрез таблица

равим таблица:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B}\cap\overline{C}$	$\overline{\overline{B}\cap\overline{C}}$	$\overline{\overline{B}\cap\overline{C}}\setminus B$	$C\cup A$	$\overline{B}\cap(C\cup A)$	
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	×
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	×
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	×

• Свойства на операциите

1) Идемпотентност

$\forall A: \ A\cup A = A\cap A = A$

2) Комутативност

$A\cup B = B\cup A$; $A\cap B = B\cap A$; $A\triangle B = B\triangle A$

3) Асоциативност

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

$(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$

4) Дистрибутивност

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

5) Свойства на $\varnothing$, U:

→неутрален елемент спрямо обединението

$A\cup\varnothing = A$

$A\cap\varnothing = \varnothing$

$A\cup U = U$

→неутрален елемент спрямо сечението

$A\cap U = A$

6) Свойства на допълнението:

$A\cup\overline{A} = U$

$A\cap\overline{A} = \varnothing$

7) Де Морган

$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$

$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

Задача от семестриално контролно 2014

вални

Д-те, че формулата $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ за произволни мн-ва A, B и C

1вар) - с таблица - гледаме дали колоните под $A\setminus(B\cup C)$ и $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ съвпадат

2вар) $\forall x\,(x\in A\setminus(B\cap C) \leftrightarrow x\in A \wedge x\notin(B\cap C) \leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)$

$\leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C) \leftrightarrow x\in A\setminus B \vee x\in A\setminus C \leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C))$

Доказахме, че

$\forall x\,(x\in A\setminus(B\cap C) \leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C))$, това е точно аксиомата за обема

$\Rightarrow A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

3вар): **Доказваме, че (Δ) $A\setminus B = A\cap\bar{B}$ чрез таблица**

Използвайки (Δ) и св-вата на операциите над м-вата:

$A\setminus(B\cap C) = A\cap\overline{(B\cap C)} = A\cap(\bar{B}\cup\bar{C}) = (A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C}) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Задача③ Д-те, че $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$, използвайки еквивалентни преобразувания:

$\overline{A\cap B} = \{x \mid x\notin A\cap B\} = \{x \mid \neg(x\in A\cap B)\} = \{x \mid \neg(x\in A\wedge x\in B)\} =$

$= \{x \mid \neg(x\in A)\vee\neg(x\in B)\} = \{x \mid x\notin A\vee x\notin B\} = \{x \mid x\in\bar{A}\vee x\in\bar{B}\}$

$= \{x \mid x\in\bar{A}\cup\bar{B}\} = \bar{A}\cup\bar{B}$

- **Методи за д-ване на равенство м/у две множества A и B**

1) Чрез таблица
2) $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$
3) Чрез преобразуване - пример: зад③

ад ④

Нека $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $\nearrow$ праелементи / не са м-ва

Операция	Резултат	Мощност
$A \cup \emptyset$	A	n
$A \cap \emptyset$	$\emptyset$	0
$A \cup \{\emptyset\}$	$\{a_1, \dots, a_n, \emptyset\}$	$n+1$
$A^2 \cup A$	$\{(a_1,a_1), \dots, (a_n,a_n), a_1, \dots, a_n\}$	n^2+n
$A^2 \cap A$	$\emptyset$	0
$\{A^2, A\}$	$\{A^2, A\}$	2
$2^A \cap A$	$\emptyset$	0
$2^A \cup A$	$\{\emptyset, \{a_1\}, \dots, \{A\}, a_1, \dots, a_n\}$	$2^n + n$
$2^A \cap \{A\}$	$\{A\}$	1
$A \cap \{\emptyset\}$	$\emptyset$	0
$2^A \cup \{A\}$	2^A	2^n

↳ + да се помисли какъв щеше да е резултатът в горната таблица, ако някой от елементите на A беше $\emptyset$. Тест

Нека $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}, \emptyset\}$.

За упр: 1) Дсд/опровергае $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$; $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$

2) Нека $A = \{a, b\}$ и $B = \{b, c\}$

Да се намери: $2^{A \cup B}$; 2^A , 2^B

Ако мислим, че не е вярно, търсим контрапример

зад ⑤ Нека $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^+\}$; $B = \{2p \mid p \in \mathbb{N}^+\}$. Дсд/опровергае $A = B$. Дали $A \subseteq B$ или $A \supseteq B$ → контрапример: използване горния контрапример.

Р-е: Привидно не е вярно: Търсим контрапример: число, което е четно, но не е степен на 2 като: например 6.

Оказва се, че $A \subseteq B$ (ако беше $k \in \mathbb{N}_0$ и $p \in \mathbb{N}_0$, то $1 \in A$, но $1 \notin B$) + какво щеше да стане, ако $k \in \mathbb{N}$ $A \setminus \{1\} \subseteq B$

Д-во: Нека $x \in A$, тогава $\exists k \in \mathbb{N}^+ : x = 2^k$; $k \geq 1 \Rightarrow k-1 \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow 2^{k-1} \geq 1 \Rightarrow 2^{k-1} \in \mathbb{N}^+$. Взимаме $p = 2^{k-1}$, тогава по деф за B: $2.p \in B$, където $2p = 2.2^{k-1} = 2^k \in B$

Доказахме, че за произволно x: $x \in A \rightarrow x \in B \Rightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$ $\Rightarrow A \subseteq B$

// Зад. за началото на часа

1) Д-ка чрез екв. преобразувания, че - от сем. контролно 2020

а) $(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q$

б) $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv p \vee q$ } от сем. контролно

а)-реш.

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \equiv [(p \wedge q) \vee p] \wedge [(p \wedge q) \vee q] \wedge [(p \wedge q) \vee r]$$

$$\equiv p \wedge q \wedge ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \equiv$$

$$\equiv p \wedge q \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge (p \vee r)) \wedge (q \wedge (q \vee r)) \equiv p \wedge q$$

б)-реш.

$$(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv [(p \vee q) \wedge p] \vee [(p \vee q) \wedge q] \vee [(p \vee q) \wedge r] \equiv$$

$$\equiv p \vee q \vee ((p \wedge r) \vee (r \wedge q)) \equiv p \vee q$$

2) За всяко от следните съждения, определете дали е истина или лъжа и дайте солидна аргументация - от сем. контролно 2020

а) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 < 0 \rightarrow 3x+1 > 0$

- това съжд. е истина тъй като квадратът на всяко реално число е положителен, следователно антецедентът на импликацията е лъжа, а ние знаем, че тогава импликацията е истина за всяко x.

б) $\forall x \in \mathbb{R}: x < 10 \rightarrow x^2 \geq 0$

- това съждение е истина тъй като консеквентът е винаги истина за x-реално число. Знаем, че $p \rightarrow T$ е винаги истина следователно импликацията е истина за всяка стойност на x.

И може да се провери чрез таблица

Такова д-во на ~~$p \rightarrow$~~ твърдение от сл. вид $p \rightarrow q$, в което доказваме, че q е истина, от което следва че $p \rightarrow q$ е истина, се нарича тривиално доказателство

римери за д-ва чрез контрапозиция

1) Нека $n \in \mathbb{Z}$, Дсд, че ако $3n+2$ е нечетно, то n е нечетно.

"Опитваме" да докажем чрез правата посока: Нека $3n+2$ е нечетно, тогава $\exists k \in \mathbb{Z} : 3n+2 = 2k+1$. Тогава $3n+1 = 2k$?

Пробваме да докажем твърдението чрез контрапозиция (Знаем, че $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$)

Нека n е четно, тогава $\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$. Следователно

$3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$, което е четно число

Доказахме $\neg q \to \neg p$

Когато доказваме импликация $p \to q$, то допускаме p е изпълнено и доказваме, че тогава q е изпълнено, тъй като това е единственият случай, в който импликацията може да е лъжа. Тоест доказваме, че е невъзможно $p = T$ и $q = F$ едновременно

2) Нека $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Дсд, че ако $n = ab$, то $a \leq \sqrt{n}$ или $b \leq \sqrt{n}$

Няма очевиден начин да докажем q от p. Опитваме чрез контрапозиция:

ако $n = ab$, то $(a \leq \sqrt{n} \lor b \leq \sqrt{n})$ е същото като $p \to q$

$\neg q \to \neg p$ е същото като $\neg(a \leq \sqrt{n} \lor b \leq \sqrt{n}) \to \neg(n = ab)$

$a > \sqrt{n}$ и $b > \sqrt{n} \to n \neq ab$

Нека $a > \sqrt{n}$ ~~и~~ и $b > \sqrt{n}$. Тогава умножаваме двете неравенства:

$ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$: $ab > n \Rightarrow n \neq ab$ □.