ДС. Семинар 3

// Зад. от предния път:

Д-у/опровергае: $2^{A\cup B} = 2^A \cup 2^B$ и $2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$

• Къде е грешката в следното д-во:

Ще докажем, че $2^{A\cup B} = 2^A \cup 2^B$. Ще използваме аксиомата за обема, която ни "казва" кога две м-ва са равни:

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$$

1. $\forall x (x \in 2^{A\cup B} \leftrightarrow x \subseteq A\cup B \leftrightarrow \forall z (z \in x \to z \in A\cup B) \leftrightarrow \forall z (z \in x \to z \in A \vee z \in B) \overset{(\Delta)}{\longleftrightarrow}$

Използваме еквивалентности $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$

2. $\overset{(\Delta)}{\longleftrightarrow} \forall z ((z \in x \to z \in A) \vee (z \in x \to z \in B)) \leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B \leftrightarrow x \in 2^A \vee x \in 2^B$

3. $\leftrightarrow x \in 2^A \cup 2^B)$

Доказахме, че $\forall z (z \in 2^{A\cup B} \leftrightarrow z \in 2^A \cup 2^B) \to 2^{A\cup B} = 2^A \cup 2^B$

Грешката е на ред 2: Използваме имплицитно, че

$$\forall z ((z \in x \to z \in A) \vee (z \in x \to z \in B)) \equiv \forall z (z \in x \to z \in A) \vee \forall z (z \in x \to z \in B)) \equiv$$

$$\cancel{z} \subseteq A \vee x \subseteq B$$

Знаем, че универсалният квантор не дистрибутира спрямо дизюнкцията

• $2^{A\cup B} \neq 2^A \cup 2^B$ - контрапример е: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$

• Ще докажем, че $2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$, използвайки аксиомата за обема

$\forall z (z \in 2^{A\cap B} \leftrightarrow z \subseteq A\cap B \leftrightarrow \forall x (x \in z \to x \in A\cap B) \leftrightarrow \forall x (x \in z \to (x \in A \wedge x \in B)) \leftrightarrow$

$\forall x ((x \in z \to x \in A) \wedge (x \in z \to x \in B)) \leftrightarrow \forall x (x \in z \to x \in A) \wedge \forall x (x \in z \to x \in B) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow z \subseteq A \wedge z \subseteq B \leftrightarrow z \in 2^A \wedge z \in 2^B \leftrightarrow z \in 2^A \cap 2^B)$

Доказахме, че $\forall z (z \in 2^{A\cap B} \leftrightarrow z \in 2^A \cap 2^B) \to 2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$

• Фамилия е м-во от м-ва

М-вото от елементите, които могат да се появяват, се нарича опорно м-во

Пример. Нека опорното м-во е $A = \{1,2\}$. Фамилии над A са:

$X = \emptyset$

$Y = \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$Z = \{\{1,2\}\}$

Нека A е непразно опорно м-во. Покриване на A е всяка фамилия $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, такава, че $n \geq 1$ и са в сила:

1) $\forall i \in \{1,\dots,n\}: X_i \neq \emptyset$
2) $\forall i \in \{1,\dots,n\}: X_i \subseteq A$
3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = A$

Ако е изпълнено и:

4) $\forall i,j \, (1 \leq i < j \leq n \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset)$, то X се нарича разбиване на A

Спрямо опорното м-во в горния пример, разбиване, например, е $X = \{\{1,2\}\}$, а покриване - $Y = \{\{1,2\},\{1\}\}$

• Нека X е фамилия. Тогава "$\bigcup X$" означава обединението на м-вата-елементи на X.

$$\bigcup X = \{a \mid \exists S \in X : a \in S\}$$

"$\bigcap X$" означава сечението на м-вата-елементи на X.

$$\bigcap X = \{a \mid \forall S \in X : a \in S\}$$

Пример. Нека имаме фамилията $X = \{\{a\},\{b,a\},\{c\},\{a,b,d\}\}$

Тогава $\bigcup X = \{a,b,c,d\}$, а $\bigcap X = \emptyset$

Зад. - от изпит 2021.

Нека S е м-во. Нотацията "$\bigcup\bigcup S$" означава "$\bigcup(\bigcup S)$". Нека p е твърдението "$(x,y) \in S$", нека q е твърдението "$x \in \bigcup\bigcup S$" и r е твърдението "$y \in \bigcup\bigcup S$".

Дсд, че $p \rightarrow q \wedge r$

Решение: Тр. да докажем, че импликацията е истина, тоест, че ако $(x,y) \in S$ е истина, то $x \in \bigcup\bigcup S$ и $y \in \bigcup\bigcup S$ са истина. Допускаме, че $(x,y) \in S$, тоест, че $\{\{x\},\{x,y\}\} \in S$, тоест S изглежда по следния начин: $S = \{\ldots, \{\{x\},\{x,y\}\}, \ldots\}$. Знаем, че $\bigcup S = \{a \mid \exists A \in S\ a \in A\}$ тоест $\{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \bigcup S$, тоест $\{x\} \in \bigcup S$ и $\{x,y\} \in \bigcup S$, но тогава $\{x\} \cup \{x,y\} \subseteq \bigcup(\bigcup S)$, тоест $x \in \bigcup(\bigcup S)$ и $y \in \bigcup(\bigcup S)$, с което доказахме импликацията.

Математическа индукция

Основава се на валидния извод

$$\frac{P(0) \wedge \forall k (P(k) \to P(k+1))}{\therefore \forall n P(n)} \qquad \frac{P(b) \wedge \forall k \geq b (P(k) \to P(k+1))}{\therefore \forall a \geq b\, P(a)}$$

Мат. индукция може да се използва за дефинирането на обекти, като функции и м-ва.

Може да мислим за индукцията като за безкрайна стълба, за която знаем със сигурност:

1) Може да достигнем първото стъпало
2) Ако може да достигнем конкретно стъпало, то може да достигнем и следващото

Това е достатъчно, за да твърдим, че всяко стъпало е достижимо

- Индукцията е средство за доказване на вече направени твърдения, не е средство за правене на такива.

- Принцип на 'слабата' индукция
- Дсд, че $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$

1) Доказваме $P(0)$ – ~~основа~~ база
2) Допускаме, че е изпълнено $P(n)$ за някое n
3) Доказваме верността на $P(n+1)$

Принцип на силната индукция

Д-д, че $\forall n \in N \ P(n)$

1) База. Доказваме $P(0)$

2) Допускаме, че $\forall i \leq n \ P(i)$ е изпълнено

3) Стъпка. Доказваме $P(n+1)$

· Изразено спрямо правилата за извод:

$(P(0) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1)) \longrightarrow \forall n P(n)$, с домейн N

Тоест, допускането и стъпката играят ролята за доказателство на $\forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))$

· Каква ще е базата на индукцията зависи от конкретния домейн

зад(1) Да се формулира предположение за сумата на първите n естествени нечетни числа. Да се докаже хипотезата чрез индукция.

Решение:

Ще разгледаме случаите за $n=1, n=2, n=3, n=4, n=1$

1) $n=1$; $1=1$

2) $n=2$: $1+3=4$

3) $n=3$: $1+3+5=9$

4) $n=4$: $1+3+5+7=16$

5) $n=5$: $1+3+5+7+9=25$

Дефинираме следната хипотеза: $\forall n \in N^+$ (сумата от първите n положителни нечетни числа е n^2). Нека $P(n)$ е съответният предикат

Д-во:

1) База: $P(1)$, $1=1$ ✓

2) Допускане: Допускаме, че $P(k)$ е изпълнено за произволно $k \in N^+$
Тоест $1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$

// k-тото положително нечетно число е $2k-1$, тъй като $2k-1$ се получава добавяйки $(k-1)$ пъти 2 към 1

3) Стъпка. Ще докажем $P(k+1)$, тоест, че $1+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

$1+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = [1+\cdots+(2k-1)]+2k+1 \overset{ИП}{=} k^2+(2k+1) = k^2+2k+1 =$
$= (k+1)^2$

Доказахме, че $P(k) \to P(k+1)$ за произволно $k \in \mathbb{N}^+$, тоест е изпълнено $\forall k \in \mathbb{N}^+ (P(k) \to P(k+1))$.

Зад. 2 Дсд. чрез индукция, че $1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, тоест
$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$

Д-во:

1) База: $n=0$.
$2^0 = 1 = 2^1 - 1$ ✓

2) Допускаме, че твърдението е изпълнено за произволно n, тоест, че е изпълнено: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$

3) Стъпка. Ще докажем, че твърдението е изпълнено за стойност на аргумента $n+1$. Тоест, ще докажем равенството $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2}-1$

$1+2+2^2+\cdots+2^k+2^{k+1} = (1+2+\cdots+2^k)+2^{k+1} \overset{ИП}{=} (2^{k+1}-1)+2^{k+1} = 2\cdot 2^{k+1}-1 = 2^{k+2}-1$.

Твърдението е изпълнено $\forall n \in \mathbb{N}$

Зад. 3 Дсд чрез индукция, че $2^n < n!$ $\forall n \geq 4$, $n \in \mathbb{Z}$.

Нека $P(n)$ е предикатът "$2^n < n!$"

1) База: $P(4)$ е истина, тъй като $2^4 = 16 < 24 = 4!$
2) Допускаме, че $P(n)$ е изпълнено за произволно $n \geq 4$. Тоест
$2^n < n!$

3) Ще докажем, че $P(n+1)$ е истина

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n < 2\cdot n! \overset{\text{тъй като } 2<n+1}{<} (n+1)n! = (n+1)!$

Доказахме $P(n+1)$

Следователно $\forall n \geq 4$ $P(n)$ е истина!

Зад (4) Д-се, че $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ($n^3 - n$ се дели на 3)

Нека $P(n)$ е предикатът "$n^3 - n$ се дели на 3"

Д-во:

1) База: $P(1)$: $1 - 1 = 0$ се дели на 3 ✓

2) Допускаме, че $P(n)$ е изпълнено за произволно n, тоест

$n^3 - n$ се дели на 3

3) Стъпка. Ще докажем $P(n+1)$

$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$ но от

ИП: $(n^3 - n)$ се дели на 3 $\Rightarrow$ $(n^3 - n) = 3 \cdot q$, $q \in \mathbb{Z}$, тогава

$(n^3 - n) + 3(n^2 + n) = 3q + 3(n^2 + n) = 3(q + n^2 + n)$

$\Rightarrow$ доказахме $P(n+1)$ ✓

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^+ P(n)$ е истина.

• Базата на индукцията зависи от твърдението, което искаме да докажем. Например твърдението $n^2 < 2^n$ не е вярно за $n = 1, 2, 3, 4$, но е вярно за $n \geq 5$. В такъв случай базата на индукцията е 5

Зад (5) Нека $S(n)$ е предикатът "хвърляйки n зара, има точно $5n + 1$ различни възможни общи суми, които могат да се получат от събирането на точките на паднатите се страни"

Д-се ~~...~~ $\forall n \in \mathbb{N}^+ S(n)$

Д-во: Ще докажем твърдението по индукция

1) База. $S(1)$. При хвърлянето на един зар има точно 6 различни възможности за изход

2) Допускаме, че $S(k)$ е изпълнено за произволно $k \geq 1$

3) Стъпка. Ще докажем $S(k+1)$

Разглеждаме $k+1$ зара: $D_1, \dots, D_{k+1}$. Сред първите k зара: $D_1, \dots, D_k$, спрямо ИП има $5n + 1$ различни възможни суми. Сред тях най-малката е k - всеки от заровете $D_1, \dots, D_k$ е ~~...~~

показва 1. Най-голямата сума, от друга страна, е 6k (всеки показва 6). Тогава, използвайки D_{k+1}, най-малката възможна сума е k+1 (всички показват 1) и всяка от 6k+1, 6k+2, ..., 6k+6 е нова възможна сума. Следователно има 6 нови възможни суми и една стара - k, която е невъзможно да се постигне с k+1 зара. Поради това с k+1 зара се получават суми, с 5 повече от тези, получаващи се с k зара.

От ИП знаем, че последните са точно 5k+1. Тогава, новите са $5k+1+5 = 5(k+1)+1$, с което доказахме $S(k+1)$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ S(n)$ е истина

Индуктивно дефинирани м-ва

Схема:

1) База

$x_1, x_2, \dots, x_n \in S$

2) Допускане

Нека $y_1, \dots, y_m \in S$

3) Стъпка

$z_1, \dots, z_k \in S$, където $z_1, \dots, z_k$ са получени чрез $y_1, \dots, y_m$

Пример:

- $\mathbb{N}$

1) База: $0 \in \mathbb{N}$

2) Нека $x \in \mathbb{N}$

3) Тогава $x+1 \in \mathbb{N}$

- м-вото от съждения: S

1) База: Всяко просто съждение $p \in S$

2) Нека x_1, x_2 са съждения

3) Тогава $x_1 \to x_2,\ x_1 \leftrightarrow x_2,\ \neg x_1,\ x_1 \oplus x_2,\ x_1 \land x_2,\ x_1 \lor x_2 \in S$

⑥ Нека p е просто съждение. и $\varphi \equiv p \wedge \neg p$ и $\psi \equiv p \vee \neg p$

Дефинираме индуктивно м-вото S:

1) База: φ и $\psi \in S$

2) Инд. предп: Нека $x, y \in S$

3) Инд. стъпка: Тогава $x \wedge y$, $x \vee y \in S$

4) Извод: Нищо др. не е елемент в S

Д-д, че $\forall a \in S$: a е противоречие или a е тавтология.

Решение:

1) База: φ е противоречие, ψ е тавтология

2) Инд. предп. Допускаме, че всички x, y, генерирани до този момент ~~ги~~ $\in S$, са противоречие или тавтологии.

3) Инд. стъпка. Ще докажем, че $x \wedge y \in S$ ~~и~~ $x \vee y \in S$ са противоречия или тавтологии:

1сл) БОО x е противоречие, а y - тавтология

Тогава $x \wedge y \in S$ и $x \wedge y$ е противоречие

$x \vee y \in S$ и $x \vee y$ е тавтология

2сл) и x и y са противоречия

Тогава $x \wedge y \in S$ и $x \wedge y$ е противоречие, както и $x \vee y$

3сл) и x и y са тавтологии

Тогава $x \vee y$ и $x \wedge y$ са тавтологии

Извод $\forall a \in S$: a е противоречие или тавтология е изпълнено

2) Д-те, че $\forall n \geq 14 \, (P(n))$ е истина, където

$P(n)$ е предикатът "n може да се представи като сума на 3ки и 8ци"

Доказателство:

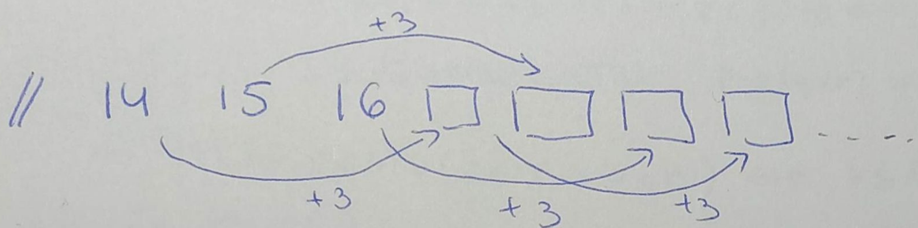
1) База

Базовите случаи са: $S(14)$, $S(15)$, $S(16)$

$14 = 2.3 + 1.8$ ✓

$15 = 5.3 + 0.8$ ✓

$16 = 2.8 + 0.3$ ✓



2) Допускаме, че $P(k)$ е истина за някое $k \geq 14$.

Тоест $\exists a, b \in \mathbb{Z}: k = a.3 + b.8$.

3) Стъпка. Ще докажем $P(k+3)$

$k+3 \overset{ИП}{=} a.3 + b.8 + 3 = (a+1).3 + b.8$ ✓

Извод: $\forall n \geq 14 \, P(n)$ е истина.

// Забележка: Възможно е и да си вземем един базов случай: 14 и стъпка +1 (а не +3).

Допускането ще е че $\exists a, b \in \mathbb{Z}: n = 3.a + 8.b$, за някое фикс. $n \geq 14$

Стъпката ще изглежда по сл. начин:

$n \to n+1$ / $n+1 \overset{ИП}{=} 3a + 8b + 1 = 3a + 8b + 2.8 - 3.5 = 3(a-5) + 8(b+2)$,

където $a-5 \in \mathbb{Z} \wedge b+2 \in \mathbb{Z}$ ✓

Но в този случай условието трябва да позволява и отрицателни суми на 3ки.