ДС. Семинар № 4. Релации

Деф. Релация - подмножество на декартово произведение

Нека $n \geq 1$. и $A_1, \ldots, A_n$ са мн-ва. Релация над декартовото произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ се нарича всяко мн-во $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$

A_1 - първи домейн

...

A_n - n-ти домейн

R се нарича n-местна

Нека $A = \{a, b\}$; $B = \{1, 2, 3\}$.

Пример за релации над $A \times B$:

$R_1 = \{(a,1), (b,2), (b,3)\}$, където пишем $(a,1) \in R_1$, $(b,2) \in R_1$, $(b,3) \in R_1$

$R_2 = \varnothing$

$R_3 = \{(a,1)\}$, $(a,1) \in R_3$; $(b,3) \notin R_3$

Още нар

Нека A е множество.

$R \subseteq A \times A = A^2$ наричаме релация над декартовия квадрат A^2.

Пример:

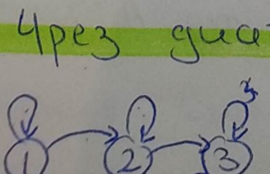
Нека $A = \{1, 2, 3\}$ и $R \subseteq A^2$, такава, че $R = \{(1,2), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

Ще представяме R по два начина:

1) Чрез матрица

	1	2	3
1	1	1	1
2	0	1	1
3	0	0	1

2) Чрез диаграма



Задача ①. Всички релации в тази задача са над декартовия квадрат $\mathbb{Z}^2$.

$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$

$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$

$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \lor a = -b\}$

$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$

$R_5 = \{(a,b) \mid a = b+1\}$

$R_6 = \{(a,b) \mid a+b \leq 3\}$

Кои от тези релации съдържат $(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$; $(1,-1)$; $(2,2)$?

Решение:

- $(1,1)$

$(1,1) \in R_1$; $(1,1) \in R_3$; $(1,1) \in R_4$;

- $(1,2)$

$(1,2) \in R_1$; $(1,2) \in R_6$

- $(2,1)$

$(2,1) \in R_2$; $(2,1) \in R_5$; $(2,1) \in R_6$

- $(1,-1)$

$(1,-1) \in R_2$; $(1,-1) \in R_3$; $(1,-1) \in R_6$

- $(2,2)$

$(2,2) \in R_1$; $(2,2) \in R_3$; $(2,2) \in R_4$

Задача ② Колко релации има над A^2, където $|A| = n$?

Решение:

Релация над A^2 е подмножество на $A \times A$. Щом $|A| = n$, то $A \times A$ има n^2 елемента. Знаем, че всички подмножества на m-елементно м-во са 2^m. Тогава $A \times A$ има 2^{n^2} подмножества, следователно и толкова релации над A^2.

Пример: $A = \{a, b, c\}$. Има $2^{3^2} = 2^9 = 512$ релации над A^2

Свойства

Нека $R \subseteq A^2$

1) Рефлексивност

Казваме, че R е рефлексивна релация тстк $\forall a \in A (aRa)$

- матрично представяне
- представяне с диаграма

Пример: Нека $A = \{a, b, c\}$

$R_1 = \{(a,a), (a,c), (b,b), (c,b), (c,c), (c,a)\}$ - рефлексивна

$R_2 = \{(a,a), (c,a), (c,c)\}$ - НЕ е рефлексивна $((b,b) \notin R_2)$

$R_3 = \emptyset$ - не е рефлексивна

2) Антирефлексивност

Казваме, че R е антирефлексивна релация тстк $\forall a \in A (\neg aRa)$

- матрично / с диаграма

Пример: Нека $A = \{a, b, c\}$

$R_1 = \emptyset$ - р. антирефлексивна е

$R_2 = \{(a,b), (a,c), (c,a), (c,c), (b,c)\}$ - НЕ е антирефлексивна

$R_3 = \{(a,b), (b,c)\}$ - антирефлексивна е

3) Симетричност

Казваме, че R е симетрична релация тстк $\forall a, b \in A (a \neq b \to (aRb \to bRa))$

Алтернативен запис е: $\forall a \forall b (aRb \to bRa)$

- матрично / с диаграма

Пример: Нека $A = \{a, b, c\}$

$R_1 = \emptyset$ - симетрична е

$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ - симетрична е

$R_3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (c,a)\}$ - симетрична е

$R_4 = \{(a,a); (a,b), (b,a), (b,c)\}$ - НЕ е симетрична

Задача 3: Кои от релациите в задача 1 са симетрични

Решение: Симетрични са: R_3; R_4; R_6

4) антисиметричност

Казваме, че $R \subseteq A^2$ е $\overset{\text{анти}}{\vee}$симетрична релация тстк $\forall a,b \in A (a \neq b \to (aRb \to$ [illegible]

Еквивалентен запис е $\forall a,b (aRb \land bRa \to a=b)$

- матрично / с диаграма

Пример: Нека $A = \{a,b,c\}$

$R_1 = \emptyset$ - антисиметрична е

$R_2 = \{(a,a),(b,b)\}$ - антисиметрична е

$R_3 = \{(a,a),(b,c)\}$ - антисиметрична е

$R_4 = \{(a,a),(b,c),(c,a),(a,c)\}$ - НЕ е антисиметрична (НЕ е и симетрична)

Задача ④ Кои релации от зад. ① са антисиметрични

Антисиметрични са: R_1; R_2; R_4; R_5

//Заб. Релация R е едновременно симетрична и антисиметрична тстк $\forall a,b \in A (aRb \to a=b)$

↳ в матрично представяне извън главния диагонал има само 0-ли, съдържанието на главния диагонал не ни интересува.

5) Транзитивност

Казваме, че $R \subseteq A^2$ е транзитивна релация тстк $\forall a,b,c \in A (aRb \land bRc \to aRc)$

- с диаграма

Пример: Нека $A = \{a,b,c\}$

$R_1 = \emptyset$ - транзитивна е

$R_2 = \{(a,a),(a,b)\}$ - транзитивна е

$R_3 = \{(a,b),(b,a)\}$ - НЕ е транзитивна (липсва (a,a))

$R_4 = \{(a,c),(c,a),\overset{(c,c)}{\vee}(a,a)\}$ - транзитивна е

6) Силна антисиметричност

Казваме, че $R \subseteq A^2$ е силно антисиметрична релация тстк

$\forall a,b \in A (a \neq b \to aRb \oplus bRa)$

- матрично / с диаграма

Пример: Нека $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\emptyset$ – НЕ е силно антисиметрична

$R_2=\{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ – НЕ е силно антисиметрична (a и b са несравними както и b и c)

$R_3=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$ – силно антисиметрична е

$R_4=\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$ – НЕ е с. антисиметрична

Пример: Нека $A=\{a\}$. Тогава $A\times A=\{(a,a)\}$ и $\emptyset\subseteq A^2$, $\{(a,a)\}\subseteq A^2$

Дали $\emptyset$ е силно антисиметрична? Симетрична?

Дали $\{(a,a)\}$ е силно антисиметрична? Симетрична?

Зад. 5 Нека $A=\{1,2,3,4\}$

Изследвайте следните релации за вте свойства:

$R_1=\{(1,1),(1,2);(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$

$R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

$R_3=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$

$R_4=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

$R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

$R_6=\{(3,4)\}$

Решение:

- R_1: $(3,3)\notin R_1\to R_1$ не е рефлексивна
  - $(1,1)\in R_1\to R_1$ не е антирефлексивна
  - $(1,2)\in R_1\wedge(2,1)\in R_1\to R_1$ не е антисиметрична и не е силно ант.
  - $(3,4)\in R_1\wedge(4,3)\notin R_1\to R_1$ не е симетрична
  - $(3,4)\in R_1\wedge(4,1)\in R_1\wedge(3,1)\notin R_1\to R_1$ не е транзитивна
- R_2: $(2,2)\notin R_1\to R_2$ не е рефлексивна
  - $(1,1)\in R_2\to R_2$ не е антирефлексивна
  - $(1,2)\in R_2\wedge(2,1)\in R_2\to R_2$ е симетрична и R_2 не е антис. и не е силно антис.
  - R_2 е транзитивна
- R_3 $\forall a\in A\,(aR_3a)\to R_3$ е рефлексивна и не е антирефлексивна
  - $\forall a,b\in A\,(aR_3b\to bR_3a)\to R_3$ е симетрична и не е антис. и не е с. ант.
  - $(4,1)\in R_3\wedge(2,1)\in R_3\wedge(2,4)\notin R_3\to R_3$ не е транзитивна

• R_5 : $\forall a \in A\ (aR_5a) \to R_5$ е рефлексивна и не е антирефлексивна

$(1,2) \in R_5 \wedge (2,1) \notin R_5 \to R_5$ не е симетрична

R_5 е антисиметрична и е и силно антисиметрична

R_5 е транзитивна

• R_6 : $\forall a \in A\ \neg(aR_6a) \to R_6$ е антирефлексивна и не е рефлексивна

$(3,4) \in R_6 \wedge (4,3) \notin R_6 \to R_6$ не е симетрична и е антисиметрична

$(2,4) \notin R_6 \wedge (4,2) \notin R_6 \to R_6$ не е силноантисиметрична

$\forall a,b,c \in A\ (aR_6b \wedge bR_6c \to aR_6c)$ е изпълнено, тъй като антецедентът е лъжа $\Rightarrow R_6$ е транзитивна релация

• R_4 $\forall a \in A\ (\neg aR_4a) \to R_4$ е антирефлексивна и не е рефлексивна

$(2,1) \in R_4 \wedge (1,2) \notin R_4 \to R_4$ не е симетрична

$\forall a,b\ (aR_4b \wedge bR_4a \to a=b)$ е изпълнено, тъй като антецедентът е лъжа $\Rightarrow R_4$ е антисиметрична

$\forall a,b\ (a \neq b \to aR_4b \oplus bR_4a) \Rightarrow R_4$ е силноантисиметрична

задача 6 Колко са рефлексивните релации над n-елементно множество?

Решение: Нека A е м-во и $|A| = n$. Релация $R \subseteq A^2$ се определя еднозначно от това кои наредени двойки от A^2 се съдържат в нея.

За да бъде R рефлексивна, $(a,a) \in R, \forall a \in A$. Всички останали $n^2 - n$ наредени двойки могат да бъдат или да не бъдат в R.

Тогава възможностите за R са $2^{n(n-1)}$

// Брой антисиметрични: $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

// Брой симетрични и едновременно антисиметрични: 2^n

// Брой силноантисиметрични: $2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

// Брой симетрични: $2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

задача 7 Нека $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, $R = \{(x,y) \mid 2x = 3y\}$. Да се изследва R за 6-те свойства

1) Рефлексивност.

Контрапример: $3.1 \neq 2.1 \to (1,1) \notin R \Rightarrow R$ не е рефлексивна

2) Антирефлексивност: Контрапример: $2.0 = 3.0 \Rightarrow (0,0) \in R$

Симетричност

Контрапример: Нека $x=3$ и $y=2$. Тогава $2x = 2.3 = 3.2 = 3.y$

$\Rightarrow$ $(3,2)\in R$, но $2.2 = 2.y \neq 3.3 = 3.x$ $\Rightarrow (y,x)\notin R$
$(x,y)\in R$

$\Rightarrow$ R не е симетрична

4) Антисиметричност

Допускаме, че

$$\begin{array}{l|l} (x,y)\in R & 2x = 3y \quad /\cdot \frac{1}{2} \\ (y,x)\in R & 3x = 2y \quad /\cdot\frac{1}{3} \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y \\ x = \frac{2}{3}y \end{array} \right. \Rightarrow \frac{3}{2}y = \frac{2}{3}y \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow x = y$

Показахме, че $\forall x,y\in\mathbb{Z}\ ((x,y)\in R \wedge (y,x)\in R \rightarrow x=y)$

$\Rightarrow$ R е антисиметрична

5) Силно антисиметрична

Контрапример: Нека $x=1$ и $y=0$

$2.x = 2.1 \neq 3.0 = 3.y \Rightarrow (x,y) = (1,0)\notin R \ \wedge\ 2y = 2.0 \neq 3.1 = 3.x$

$\Rightarrow (0,1)\notin R$

$\Rightarrow$ R не е силно антисиметрична

6) Транзитивност

Контрапример: Нека $x=9$, $y=6$, $z=4$

Тогава $2.x = 2.9 = 18 = 3.6 = 3.y \Rightarrow (x,y)\in R$ / xRy

$2.y = 2.6 = 12 = 3.4 = 3.z \Rightarrow (y,z)\in R$ / yRz

Но $\underset{2.x}{\overset{}{2.9}} = 18 \neq 12 = 3.4 = 3.z \Rightarrow (x,z)\notin R$

($2.9 \overset{!!}{=} 2.x$)

$\Rightarrow$ R не е транзитивна

зад.

Деф. $R\subseteq A\times A$ наричаме релация на еквивалентност, ако:

R е рефлексивна, симетрична и транзитивна

Нека $R\subseteq A^2$ е релация на екв. За всеки $a\in A$ дефинираме множеството $[a] = \{b\in A \mid aRb\}$

Тогава фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A

Зад. 8: Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) \mid a+b$ е четно$\}$

Да се провери дали R е релация на екв. и да се определят класовете ѝ на еквивалентност

Решение:

1) ~~Симетричност~~ $a+b$ е четно тстк a и b дават един и същи остатък при деление на 2

Тоест $a+b$ е четно тстк $a \equiv b\ (2)$

1) ~~Симетричност~~: Рефлексивност

$\forall a \in \mathbb{N}\ (a \equiv a \pmod 2) \Rightarrow a+a$ е четно $\Rightarrow (a,a) \in R$

$\Rightarrow R$ е ~~симетрична~~ рефлексивна

2) Симетрична

$a+b$ е четно тстк $b+a$ е четно $\Rightarrow \forall a,b\ (aRb \rightarrow bRa) \Rightarrow$

R е симетрична

3) Транзитивност

Нека $a+b$ е четно и $b+c$ е четно (тоест aRb и bRa)

Тогава $a \equiv b\ (2)$ и $b \equiv c\ (2)$, но тогава $a \equiv c\ (2)$

$\Rightarrow a+c$ е четно $\Rightarrow aRc$

$\Rightarrow R$ е транзитивна

От 1), 2) и 3) $\Rightarrow R$ е релация на еквивалентност

б) Класове на еквивалентност

R има два класа на еквивалентност

$[0] = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

$[1] = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

За упр: $R \subseteq A \times A$, $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 4\}$

Дали R е рел. на екв.-и, ако да, да се намерят класовете ѝ на еквивалентност деф. $R \subseteq A^2$ е релация на частична наредба тстк е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна

задача (9) Нека $R \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, $R = \{(a,b) \mid a|b\}$ // $b = a.p$, $p \in \mathbb{Z}^+$

Да се определи дали R е частична наредба

1) Рефлексивност

$\forall a \in \mathbb{Z}^+$: $a = 1.a \Rightarrow a|a \Rightarrow (a,a) \in R$

$\Rightarrow R$ е рефлексивна

2) Антисиметричност

Знаем, че $\forall a,b \in \mathbb{Z}^+$: $a|b \wedge b|a \rightarrow a = b$

$\Rightarrow R$ е антисиметрична

3) Транзитивност.

Нека $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$: $a|b \wedge b|c$. Тоест $b = a.p \wedge c = b.q$, $p,q \in \mathbb{Z}^+$

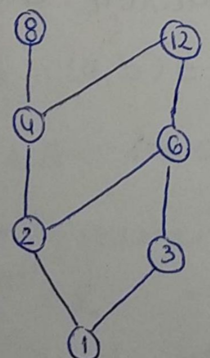
Тогава $c = b.q = a.p.q = a.(\overbrace{p.q}^{\in \mathbb{Z}^+}) \Rightarrow a|c$

$\Rightarrow R$ е транзитивна

От 1), 2) и 3) $\Rightarrow R$ е частична наредба.

задача (10) Нека $R \subseteq A^2$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$: $R = \{(a,b) \mid a|b\}$

Да се построи диаграма на Hasse за R



- за упр. (11) Нека $S = \{a,b,c\}$ и $R \subseteq 2^S \times 2^S$: $R = \{(A,B) \mid A \subseteq B\}$ Да се конструира диаграма на Hasse за R

• Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, ч

a е минимален в R, ако $\neg \exists b \in A \, (b \neq a \wedge bRa)$

$$\equiv$$

$$\forall b \in A \, (b = a \vee \neg bRa)$$

$$\equiv$$

$$\forall b \in A \, (b \neq a \rightarrow \neg bRa)$$

За всеки $a \in A$, казваме, че a е максимален в R, ако

$$\neg \exists b \in A \, (b \neq a \wedge aRb)$$

$$\equiv$$

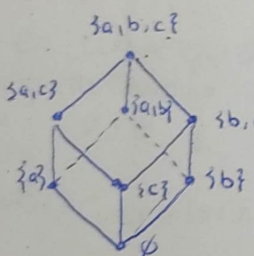
$$\forall b \in A \, (b = a \vee \neg aRb)$$

$$\equiv$$

$$\forall b \in A \, (b \neq a \rightarrow \neg aRb)$$

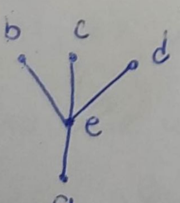
За упр. Да се посочат максималните и минималните елементи в зад. 10 / 9 / 11

// зад 10 Решение:



зад. 12 Да се определи дали релациите, представени със следните диаграми имат максимален и минимален елемент

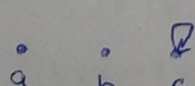
а)



- минимален: a

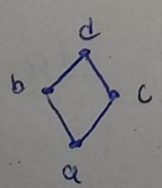
макс: b, c, d

б)



- всеки елемент е макс. и мин.

в)



- минимален: a

максимален d

зад. 13 - от изпит

Нека R е релация над крайно непразно множество A. Релацията $R \circ R$ дефинираме така:

$R \circ R = \{(a,b) \mid \exists c \in A\ (aRc \wedge cRb)\}$

Степените на релацията R дефинираме така:

$R^1 = R$

$\forall n \in \mathbb{N}^+ : R^{n+1} = R^n \circ R$

Да се д. че за всяка релация $R \subseteq A \times A$, R е транзитивна тстк $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$

// Бонус: Ако заменим "$R^n \subseteq R$" с "$R^n = R$" твърдението остава ли в сила?

Решение:

Формата на твърдението, което трябва да докажем има вида $p \leftrightarrow q$, където p и q са съждения. За да докажем такова твърдение, трябва да докажем $p \to q$ и $q \to p$.

$\Rightarrow$/ Нека $R \subseteq A \times A$ е транзитивна. Ще докажем $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ по индукция.

1) База: $n=1$. Тогава, очевидно е изпълнено $R \subseteq R$ ($\forall$А-во $A \subseteq A$)

2) Допускане, че $R^n \subseteq R$ за някое $n \in \mathbb{N}^+$

3) Ще докажем, че $R^{n+1} \subseteq R$

Нека $(a,b) \in R^{n+1}$ е произволен елемент. По дефиниция за R^{n+1}:

$\exists c \in A : (a,c) \in R^n \wedge (c,b) \in R$. Но по ИП $R^n \subseteq R \Rightarrow (a,c) \in R$

и от транзитивността: $(a,b) \in R$

$\Rightarrow R^{n+1} \subseteq R \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$

$\Leftarrow$/ Нека $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ Ще докажем, че R е транзитивна.

Допускаме противното: R не е транзитивна и свидетели за това са $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$: $(a,c) \notin R$. От $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$ по дефиниция за R^2 следва, че $(a,c) \in R^2$. Но ние знаем, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ е изпълнено, в частност $R^2 \subseteq R$. Но $(a,c) \in R^2 \wedge (a,c) \notin R$

$\Rightarrow$ противоречие с антецедента

$\Rightarrow$ допускането е погрешно $\Rightarrow$ R е транзитивна.

// Бонус: НЕ е вярно. Контрапример:

"Търсим" транзитивна релация, която не съвпада с някое от степените си. Пример: $R=\{(a,b)\}$, то $R^2=\emptyset$ и $R \neq R^2$

зад. 13 – за упражнение – от изпит

Д-у, че за всяка релация $S \subseteq A \times A$, ако S е рефлексивна и транзитивна, то $\forall n \in \mathbb{N}^+ (S^n = S)$ // където $S \circ S$ и S^n са деф. в зад. 12

зад. 14 – от изпит

Нека $S = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 5;\ 0 \leq y \leq 5\}$. Релацията $R \subset S \times S$ е дефинирана

$$R = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid x_1 = x_2,\ y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Д-у, че R е релация на еквивалентност и да се определи класът на еквивалентност на точката $(2,4)$

Решение: Ще докажем, че R е рефлексивна, симетрична и транзитивна

1) Рефлексивност:

$\forall x,y\,(x=x \wedge y-y=0 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \forall (x,y)(((x,y),(x,y)) \in R) \Rightarrow R$ е рефлексивна

2) Симетричност

Нека $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in R \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$. То ние знаем, че равенството е симетрично $\Rightarrow x_2 = x_1$ и $\forall a \in \mathbb{Z}(-a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ((x_2,y_2),(x_1,y_1)) \in R \Rightarrow R$ е симетрична

3) Транзитивност

Нека $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in R$ и $((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \in R$. Тогава

$x_1 = x_2$ и $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$ и $x_2 = x_3$ и $y_2 - y_3 \in \mathbb{Z}$. От транзитивността на равенството: $x_1 = x_3$. От $\forall a,b\,(a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \rightarrow a+b \in \mathbb{Z})$ следва, че $(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) \in \mathbb{Z}$, тоест $y_1 - y_3 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \in R \Rightarrow R$ е транзитивна.

$\Rightarrow R$ е релация на еквивалентност

$[(2,4)] = \{(2,y) \mid 4-y \in \mathbb{Z}\}$ и при ограничение $0 \leq y \leq 5$, то

$[(2,4)] = \{(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$