ДС. Семинар №5. Функции

Нека A, B - множества

• **Частична функция**

$f: A \to B$ е частична функция, ако:

1) $f \subseteq A \times B$

2) $\forall a \in A ((\exists! b \in B : (a,b) \in f) \lor (\neg \exists b \in B : (a,b) \in f))$

• **Тотална функция**

$f: A \to B$ е тотална функция, ако:

1) $f \subseteq A \times B$

2) $\forall a \in A (\exists! b \in B : (a,b) \in f)$

A се нарича домейн на f, а B - кодомейн.

// Заб. $\exists! x P(x)$ - съществува единствено x, за което $P(x)$ е истина

$\exists! x P(x)$ има смисъл на $\exists x P(x) \land \forall x, y (P(x) \land P(y) \to x = y)$

Като казваме функция, ще имаме предвид тотална функция

Пример: Нека A, B - множества

Дали $\emptyset$ е частична функция? (с домейн A и кодомейн B)

1) $\emptyset \subseteq A \times B$

2) $\forall a \in A ((\exists! b \in B : (a,b) \in \emptyset) \lor (\forall b \in B : (a,b) \notin \emptyset))$ е истина, тъй като

$\forall b \in B : (a,b) \notin \emptyset$ е истина

$\Rightarrow$ $\emptyset$ е частична функция

. Вместо $(a,b) \in f$ пишем $f(a) = b$

• **Свойства:**

Нека A, B - множества и $f: A \to B$ е е функция

1) $f: A \to B$ е инекция, ако

$\forall x_1, x_2 \in A (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

Еквивалентен запис:

$\forall x_1, x_2 \in A (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

Пример:

- **Дали $f(x)=x^2$ е инекция?** - Зависи от домейна.

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ не е инекция, например $f(-2)=f(2)=4$, но

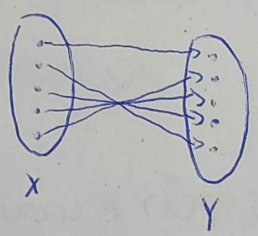
$f': \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ е инекция.

f' и f са различни функции.

- **Дали $f(x)=x+1$, където $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, е инекция?**

$f(x)=f(y) \Leftrightarrow x+1=y+1 \Leftrightarrow x=y \Rightarrow f$ е инекция.

Представяне с диаграма



- Не съществува точка от кодомейна, в която влизат две различни стрелки.

2) $f: A \to B$ е сюрекция, ако

$\forall b \in B\ \exists a \in A\ (f(a)=b)$

Пример:

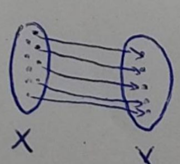
- **Дали $f(x)=x^2$ е сюрекция, където $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?**

Контрапример: $\neg \exists x \in \mathbb{Z}: f(x)=-1 \Rightarrow f$ не е сюрекция.

- **Дали $f(x)=x+1$, където $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, е сюрекция?**

$\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x = y-1 \in \mathbb{Z}: f(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{y-1}}) = y \Rightarrow f$ е сюрекция

Представяне с диаграма

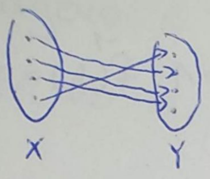


- Във всяка точка от кодомейна трябва да влиза стрелка

3) $f: A \to B$ е биекция, ако

- f е инекция
- f е сюрекция

едставяне с диаграма



- Не съществува точка от кодомейна, в която влизат две различни стрелки и във всяка точка от кодомейна трябва да влиза стрелка.

Пример:

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x+1$ е биекция.

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ е биекция

Зад 1 Дсд, че $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = ax+b$, където $a \neq 0, b$ са фиксирани реални константи, е биекция.

Д-во. Ще докажем, че f е инекция и сюрекция.

1) Инекция:

Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1) = f(x_2)$. Тогава $ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow$ $x_1 = x_2$ ✓

2) Сюрекция

Нека $y \in \mathbb{R}$. Дали $\exists x \in \mathbb{R}$: $y = ax+b$? За $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ е изпълнено, че $f(x) = y$ ✓

От 1) и 2) $\Rightarrow$ f е биекция

. Нека $f: A \to B$

1) За да докажем, че f е инекция: Доказваме, че ако $f(x) = f(y)$, то $x = y$, за произволни $x, y \in A$

2) За да докажем, че f не е инекция: Показваме конкретни $x, y \in A$, за които е изпълнено $x \neq y$ и $f(x) = f(y)$

3) За да докажем, че f е сюрекция: Намираме $x \in A$, такъв, че $f(x) = y$, за произволен $y \in B$

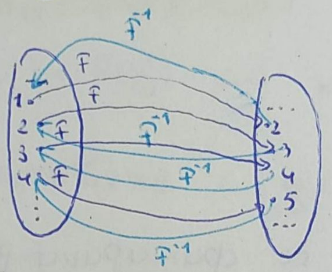
4) За да докажем, че f не е сюрекция: Намираме конкретен $y \in B$, за който е изпълнено $f(x) \neq y$, $\forall x \in A$

Обратна функция

Нека $f: A \to B$ е биекция

Обратната функция на f, бележим с f^{-1}, където $f^{-1}: B \to A$: $f^{-1}(b) = a$, ако $f(a) = b$.

Пример: Видяхме, че $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, където $f(x) = x+1$, е биекция. Тогава обратната функция на f е $f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$: $f(y) = y-1$.



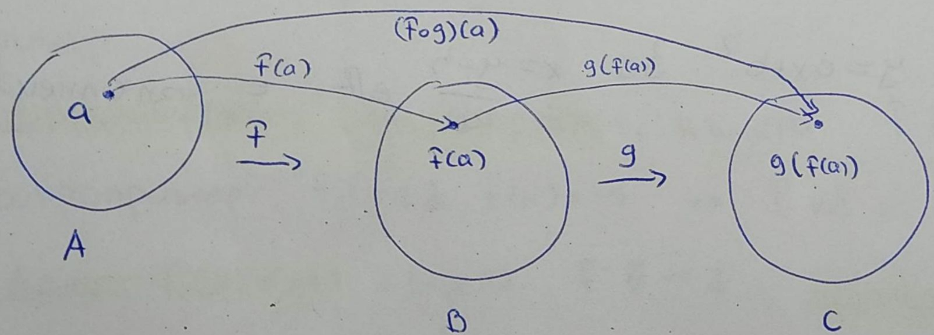
Композиция

Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$

$g \circ f$ – композиция на g и f

$g \circ f: A \to C$

$\forall a \in A \; ((g \circ f)(a) = g(f(a)))$



В общия случай $f \circ g \neq g \circ f$

Идентитет

~~Нека~~ $Id: A \to A$: $\forall a \in A \; (Id(a) = a)$

Нека $f: A \to B$, то $f^{-1}: B \to A$. Тогава

$f \circ f^{-1}: B \to B$: $\forall b \in B \; ((f \circ f^{-1})(b) = b)$

$f^{-1} \circ f: A \to A$: $\forall a \in B \; ((f^{-1} \circ f)(a) = a)$

Съществува f^{-1} – функция тстк f е биекция.

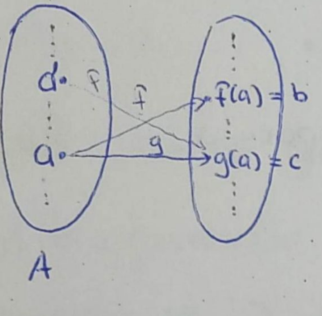
② – от изпит 2015

Дадено е м-во A и функции $f: A \to A$ и $g: A \to A$, които са биекции.

Известно е, че $\exists a \in A: f(a) \neq g(a)$. Д-се, че $\exists a' \in A: a' \neq a,\ f(a') \neq g(a')$

Решение:

Нека $f(a) = b$ и $g(a) = c$. От условието знаем, че $b \neq c$. Тогава в A има поне два елемента.



(~~...~~) От f-биекция, следва че f е сюрекция ($\forall y \in A\ \exists x \in A: f(x) = y$), $\Rightarrow$

$\exists a' \in A: f(a') = c$. Тъй като $b \neq c \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$\Rightarrow a \neq a'$

От g-биекция, следва че g е инекция ($\forall a, a' \in A: a' \neq a \to g(a') \neq g(a)$)

$\Rightarrow g(a') \neq g(a)$ (тъй като $a \neq a'$)

Тоест $g(a) = c = f(a') \neq g(a')$.

$\Rightarrow \exists a' \in A: a' \neq a,\ f(a') \neq g(a')$

зад ③ – от изпит 2022г.

Нека X и Y са произволни м-ва. Нека $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ и

$i: Y \to Y$ са ф-ции. Нека $\forall y \in Y: i(y) = y$. Нека $f \circ g = i$

Д-се/опровергае, че f е сюрекция.

Решение:

1 начин) Ще допуснем противното. Допускаме, че f не е сюрекция $\Rightarrow \exists y \in Y\ \forall x \in X: (f(x) \neq y)$. От $g: Y \to X$ – тотална, следва, че $g(y) \in X$ е дефинирано.

По условие $i(y) = y$, ~~...~~. По условие $f \circ g = i$

Следователно $y = i(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Получихме противоречието с допускането, че f не е сюрекция с представител $y \in Y$.

$\Rightarrow f$ е сюрекция.

2 начин) Твърдението е вярно. Разглеждаме произволен елемент

Нека $x = g(y)$. Тъй като f е тотална ф-ция, $f(x)$ е дефиниран.

$f(x) = f(g(y))$ // от $x = g(y)$

$= (f \circ g)(y)$ // по определение за композиция

$= i(y)$ // по условие

$= y$

Следователно $\forall y \in Y\ \exists x = g(y) \in X : (f(x) = y) \Rightarrow f$ е сюрекция.

Зад 4 * - от сем. контролно

Да се провери кои от следните три релации са функции. Ако са функции, да се определи дали са ~~също~~ тотални.

а) $R_1 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $R_1 = \{(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow |x| = |y|\}$

R_1 не е функция - контрапример: $(-1, 1) \in R_1$ и $(-1, -1) \in R_1$

б) $R_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R_2 = \{(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow |x| = y\}$

R_2 е тотална ф-ция, тъй като $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ y = |x| \in \mathbb{R} : (x, y) \in R_2$

в) $R_3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $R_3 = \{(x, y) \in R_3 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = y\}$

R_3 е частична функция. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\ \exists y = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} : (x, y) \in R_3$

и за $x = 1 \in \mathbb{R}$ не съществува $y \in \mathbb{R} : (x, y) \in R_3$

· **Определение.**

Нека A е множество.

A е крайно, ако

1) $A = \emptyset$, $|A| = 0$

2) $\exists n \in \mathbb{N}^+ : \exists f : A \to \{1, \dots, n\}$ - биекция, тогава $|A| = n$

· **Определение:**

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$

$\exists f : A \to \mathbb{N}$ - биекция

Определение

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно

Безкрайно м-воS е изброимо тстк е възможно да изредим елементите на множеството в редица (индексирана чрез $i \in \mathbb{N}$). Това е така, тъй като биекция $f: S \to \mathbb{N}$ може да се представи като редица $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, където $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $\dots$, $a_n = f(n), \dots$; $a_i \in S$

зад ⑤ Да се докаже, че $\mathbb{Z}$ е изброимо

Доказателство: Ще намерим $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ - биекция, с което ще докажем, че $\mathbb{Z}$ е изброимо.

Всички цели числа могат да бъдат изредени в редица по следния начин:

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Разглеждаме функцията: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$: $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n\text{-четно} \\ \frac{-(n-1)}{2} & , n\text{-нечетно} \end{cases}$

Ще докажем, че f е биекция:

1) Сюрекция.

Нека $x \in \mathbb{N}$. Ще покажем, че $\exists n \in \mathbb{N} : f(n) = x \wedge \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = -x$, с което ще докажем, че f е сюрекция.

Нека $n = 2x$, от $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}$. Тогава, по деф. за f: $f(n) = f(2x) = \frac{2x}{2} = x$

Нека $n = 2x+1$, от $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x+1 \in \mathbb{N}$. Тогава, по деф. за f: $f(n) = f(2x+1) =$

$= \frac{-(2x+1-1)}{2} = -x$

$\Rightarrow f$ - сюрекция

2) Инекция.

Нека $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$: $n_1 \neq n_2$. ~~$f(n_1) =$~~

сл1) n_1, n_2 - четни

$f(n_1) = \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2} = f(n_2)$

2сл) БОО n_1 - четно, n_2 - нечетно

$$f(n_1) = \underset{\underset{0}{\vee}}{\frac{n_1}{2}} > \underset{\underset{0}{\wedge}}{-\frac{(n_2-1)}{2}} = f(n_2)$$

3сл) n_1, n_2 - нечетни

$$f(n_1) = -\frac{(n_1-1)}{2} \neq -\frac{(n_2-1)}{2} = f(n_2)$$

$\Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$

От 1) и 2) $\Rightarrow$ f - биекция

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ е изброимо

Неизброими множества. Метод на диагонализацията / Cantor diagonalization argument

зад 6 Дсд, че $\mathbb{R}$ е неизброимо

Д-во: Допускаме, че $\mathbb{R}$ е изброимо. Ще се опитаме да достигнем до противоречие. Щом $\mathbb{R}$ е изброимо, то $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ е изброимо (всяко подмножество на изброимо м-во също е изброимо)

В такъв случай може да изредим всички числа между 0 и 1 в редица, индексирана от естествените числа. Нека тази редица е $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ Нека $r_1, \dots$ имат вида

$r_1 = 0.d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} \dots$

$r_2 = 0.d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} \dots$

$r_3 = 0.d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} \dots$

$r_4 = 0.d_{41} d_{42} d_{43} d_{44} \dots$

$\vdots$

където $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(Например, ако $r_1 = 0,2358\dots$, то $d_{11} = 2$, $d_{12} = 3$, $d_{13} = 5$, $d_{14} = 8$ и т.н.)

Нека формираме числото r: $0 < r < 1$: $r = 0.d_1 d_2 d_3 d_4$ по следния начин $d_i = \begin{cases} 7, & d_{ii} \neq 7 \\ 8, & d_{ii} = 7 \end{cases}$

например, ако $r_1 = 0,2345$, $r_2 = 0,3567$; $r_3 = 0,0977$, $r_4 = 0,5678..$, то $r = 0.7787...$)

Всяко реално число има уникално представяне, тогава реалното число r не е равно на r_1, тъй като се различава от него в първа позиция след десетичната запетая, не е равно и на r_2, тъй като се различава от r_2 във втора позиция след десетичната запетая и т.н. Изобщо $r \neq r_i$ в това изброяване, тъй като r се различава и от r_i поне в i-тата позиция след десетичната запетая. Намерихме число r, такова, че то не се среща в изброяването. Тогава предположението, че всяко реално число между 0 и 1 може да бъде изброено, е погрешно. Тогава множеството $A \subseteq \mathbb{R}$ е неизброимо $\Rightarrow \mathbb{R}$ е неизброимо.

· Множеството $\overset{A}{\vee}$ от всички функции $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ е неизброимо безкрайно. Съществува биекция между A и множеството $2^{\mathbb{N}}$.
Следователно, ако покажем/дефинираме тази биекция, ще докажем, че A е неизброимо. (от лекции знаем, че $2^{\mathbb{N}}$ е неизброимо)
Дефинираме: $g: 2^{\mathbb{N}} \to A$, по следния начин

Нека $B \in 2^{\mathbb{N}} \Rightarrow B \subseteq \mathbb{N}$
Тогава $g(B) = f_B$: $\forall n \in \mathbb{N} \, (n \in B \leftrightarrow f_B(n) = 1)$

Ще докажем, че g е биекция. Ще направим това, показвайки, че ~~п/строжих~~ g^{-1} съществува и е добре дефинирана.

Нека $g^{-1}: A \to 2^{\mathbb{N}}$: $g(f_B) = B$: $\forall n \in \mathbb{N} \, (f(n) = 1 \to n \in B)$
Очевидно не съществуват две различни подмножества B_1, B_2 на $\mathbb{N}$, за които $g(f') = B_1$ и $g(f') = B_2$ за коя да е ф-я f'.
Следователно g^{-1} е добре дефинирана
$\Rightarrow (g \circ g^{-1})(f_B) = g(g^{-1}(f_B)) = g(B) = f_B \Rightarrow g$ е биекция