ДС Семинар 6

Принципи на изброителната комбинаторика

• Принцип на Дирихле

Ако n предмета се разположат в m кутии, при $m<n$, то ще съществува кутия с повече от един предмет в нея.

Обобщение:

Ако повече от $k.n$ предмета се разположат в n кутии, то ще съществува кутия с повече от k предмета в нея.

Д-во чрез контрапозиция:

Нека не съществува кутия с повече от k предмета в нея, тоест всяка кутия съдържа $\leq k$ предмета. Тогава, общият брой предмети, разпределени в n-те кутии, е $\leq k.n$ ∎.

зад ① Дсд, че сред 15 студенти съществуват трима, които са родени в един и същи ден от седмицата.

Решение:

Студентите са $2.7+1$, а дните от седмицата - 7. Според горния принцип съществува ден, в който са родени трима студенти.

зад ② През едномесечен период, състоящ се от 30 дена, волейболен отбор се готви за състезание, играейки поне по един мач на ден, но не повече от 45 мача за целия период. Дсд, че съществува редица от последователни дни, през която отборът е изиграл точно 14 мача.

Решение:

Нека означим с a_i броя мачове, изиграни до i-тия ден включително. Тогава редицата $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ е растяща и не съдържа повтарящи се стойности (по условие отборът играе поне по един мач на ден), още повече $\forall i \in \{1, \dots, 30\} \ (1 \leq a_i \leq 45)$. Образуваме следната редица: $a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$. Тази редица също е растяща и не съдържа повтарящи се стойности.

още повече $\forall i \in \{1 \ldots 30\} (15 \le a_i + 14 \le 59)$

Образуваме обединението на двете редици по следния начин:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14$$

Всички 60 стойности в редицата са по-малки или равни от 59. Спрямо принципа на Дирихле съществуват два ~~стойко~~ елемента от редицата с еднакви стойности

$$(\forall i \in \{1 \ldots 30\} (a_i \le 59 \wedge a_i + 14 \le 59)) \; (a_i, a_i + 14 \in \{1, \ldots, 59\})$$

Тъй като елементите $a_1, .., a_{30}$ са два по два различни, както и елементите $a_1+14, .., a_{30}+14$, то следва, че двата елемента с еднакви стойности са от двете редици, които обединихме, тоест $\exists i, j \in \{1 \ldots 30\}$:

$$a_i = a_j + 14$$

Горното означава, че от ден $j+1$ до ден i са изиграни точно 14 мача. □

Зад (3)$^+$ Чекмедже... Сушилня в тъмна стая съдържа 100 червени, 80 зелени, 60 сини и 40 жълти чорапа. Ако чорапите се избират един по един (без да се вижда техния цвят), колко най-малко чорапа трябва да изберем, се сред тях да има 10 чифта със сигурност (чифт - два чорапа от един и същи цвят, всеки чорап може да участва само в един чифт).

Решение: Ще "построим" решението индуктивно. За да гарантираме един чифт, то, най-малко, ще трябва да изберем 5 чорапа, тъй като цветовете са 4, а чорапите - 5, ще съществуват два чорапа от един и същи цвят, тоест те ще образуват чифт. За да гарантираме два чифта, то, най-малко, ще трябва да изберем 7 чорапа: Знаем, че са необходими 5 чорапа за да съществува чифт - да речем от червен цвят. Тогава, избирайки още един, има възможност да вземем червен (гледайки най-лошия случай в досегашната купчина от 5 чорапа, два от тях са червени, останалите са - жълт, зелен и син) и в новополучената купчина от 6 чорапа ще има само един чифт. Добавяйки още един - 7ми, гарантираме (2)

два чифта. С аналогични разсъждения установяваме, че за да гарантираме 3 чифта, са ни необходими 9 чорапа. Изобщо, $2p+3$ чорапа са нужни, за да се гарантират p чифта. Последното може да се докаже по индукция - за упражнение.
Следователно, отговорът на задачата е 23.

• Принцип на разбиването/събирането

Ако A е крайно множество и $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ е разбиване на A, то $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Следствие от принципа:

$$|A| = |U| - |\bar{A}|$$

• Принцип на умножението

Ако A, B са множества, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Обобщение:

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

зад 4 За целите на тази задача парола се нарича всяка последователност от малки латински букви и цифри с дължина 6, 7 или 8, съдържаща поне една цифра. Колко са тези пароли?

Решение:

Нека означим с P броя на тези пароли, с P_6 - паролите с дължина 6, P_7 - с дължина 7 и P_8 - с дължина 8. Тогава $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Ще намерим P_6, P_7, P_8.

Ще е по-лесно да намерим броя на стринговете, съдържащи малки латински букви и цифри с дължина 6 и от тази бройка да извадим броя на всички стрингове с дължина 6, състоящи се единствено от малки латински букви. По този начин намираме P_6:
Спрямо принципа на умножението първите са точно 36^6, а вторите - 26^6. Тогава $P_6 = 36^6 - 26^6$

Аналогично за P_7 и P_8: $P_7 = 36^7 - 26^7$; $P_8 = 36^8 - 26^8$

Тогава отговорът е $P = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8$

• Принцип на биекцията

Нека A, B - множества. Тогава $|A| = |B|$ тстк съществува $f: A \to B$ - биекция

- използвахме този принцип когато изброихме характеристичните вектори с дължина n, за да намерим броя на подмножествата на n-елементно множество.

• Принцип на делението

Ако A-м-во и $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност с k - класа на екв; всеки с по m елемента то $m = \frac{|A|}{k}$

за упр. Нека $O = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $E = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Дсд, че $|O| = |E|$

Строи се биекция $f: O \to E$; Дсд, че $|E| = |\mathbb{N}|$ и $|O| = |\mathbb{N}|$

Зад 5 Нека $A = \{0, \dots, 499\}$ и $R \subseteq A^2$:

$\forall a, b \in A \, (aRb \leftrightarrow a \equiv b \pmod 2)\}$. Да се намерят класовете на еквивалентност и тяхната кардиналност

Решение: Има два класа на еквивалентност:

$[0] = \{2k \mid k \in \{0, \dots, 249\}\}$

$[1] = \{2k+1 \mid k \in \{0, \dots, 249\}\}$

В случая е очевидно, че $|[0]| = |[1]| = 250$, но нека използваме принципа на делението

$m = |[0]| = |[1]| = \frac{|A|}{2} = \frac{500}{2} = 250$

• Принцип на включването и изключването

Нека $A_1, \dots, A_n$ са множества. Тогава е в сила:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Зад.6 Колко са булевите вектори с дължина 8, започващи с '1' или завършващи на "00"?

Решение:

Нека означим с A_1 множеството от всички булеви вектори с дължина 8, които започват с '1'. С A_{00} означаваме множеството от всички булеви вектори с дължина 8, които завършват на '00'. С A_{100} означаваме м-вото от вс. булеви в-ри с дължина 8, които започват с 1 и завършват с 00. С B означаваме търсеното м-во: м-вото от всички булеви в-ри с дължина 8, започващи с '1 или, завършващи на "00".

Тогава $|B| = |A_1| + |A_{00}| - |A_{100}|$

Спрямо принципа на умножението:

$|A_1| = 2^7$

$$1\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^7 = 128}$$

$|A_{00}| = 2^6$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^6 = 64}\ 0\ 0$$

$|A_{100}| = 2^5$

$$1\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{2^5 = 32}\ 0\ 0$$

$\Rightarrow |B| = 128 + 64 - 32 = 160$

Зад.7 - от изпит 2022г.

Нека $A = \{1, 2, \ldots, 360\}$. Колко елемента от A имат поне един общ прост делител с 360.

Решение: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Нека

$A_2 = \{a \in A \mid a \text{ се дели на } 2\}$

$A_3 = \{a \in A \mid a \text{ се дели на } 3\}$

$A_5 = \{a \in A \mid a \text{ се дели на } 5\}$

Търси се $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$. Съгласно принципа на включването и изключването:

$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cup A_3 \cup A_5|$

За всяко k, броят на числата, кратни на m и ненадхвърлящи k, е

$\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$. Тогава броят на числата ≤ 360, делящи се на 2, 3 и 5 съответно

са $\left\lfloor \frac{360}{2} \right\rfloor = 180$, $\left\lfloor \frac{360}{3} \right\rfloor = 120$, $\left\lfloor \frac{360}{5} \right\rfloor = 72$.

Броят числа в интервала, кратни на 6 е $\left\lfloor \frac{360}{6} \right\rfloor = |A_2 \cap A_3|$. Аналогично,
$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{360}{10} \right\rfloor$; $|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{360}{15} \right\rfloor$; $|A_3 \cap A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{360}{30} \right\rfloor = 12$.

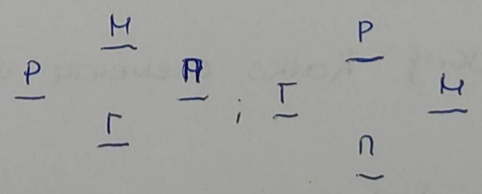
Тогава отговорът е $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12 = 264$

зад 7 По колко различни начина могат да седнат четирима души на кръгла маса. Два начина се считат за ~~разл~~ еднакви, ако всеки човек има един и същ ляв и един и същ десен съсед.

Решение: Произволно избираме стол и го наричаме първи. Номерираме последователно останалите столове по часовниковата стрелка. Трябва да подредим четирите човека сред получените 4 позиции, което може да се случи по 4! начина спрямо принципа на умножението. Тази бройка е повече от търсената. Нека инициалите на четирите човека са М, П, Г, Р. Забелязваме, че например следните две подредби:

М П Г Р ;
Р М П Г
са един и същ

спрямо кръговата наредба:



Следователно, бройката 4! брои четири пъти всяка съществено-различна подредба => отговорът е $\frac{4!}{4} = 3!$

зад 8 За упражнение - Колко са булевите вектори с дължина 4, които не съдържат две последователни единици.

// Един възможен вариант е чрез вкл.-изкл.

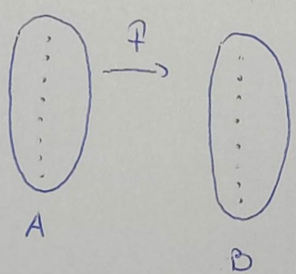
зад. 9 Нека A, B са множества, такива, че $|A| = m$, $|B| = n$.
Колко са инекциите $f: A \to B$

Решение:

Ако $m > n$, то не съществуват инекции $f: A \to B$

Нека $m \leq n$. Нека елементите от домейна са $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Има n начина да изберем стойност за $f(a_1)$. Тъй като "строим" инекциите, то за $f(a_2)$ ще има $n-1$ възможни стойности. Продължавайки по същия начин, за $f(a_m)$ ще има $n-m+1$ възможни стойности. Съгласно принципа на умножението, отговорът е, че има $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ инективни функции от вида $f: A \to B$.



$a_1 : n$
$a_2 : n-1$
$a_3 : n-2$
$\ldots$
$a_m : n-m+1$