ДС. Семинар 7
Комбинаторни конфигурации

Нека е дадено опорно множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
От него ще изграждаме конфигурации с големина m

1) Конфигурации с наредба и без повторение
- това са наредени m-торки, състоящи се от елементите на A (не е разрешено повтаряне на елемент)

Множеството от тези конфигурации бележим с "$K_H(n,m)$"

$|K_H(n,m)| = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$

// Пример: Ако $m=3$, то наредените тройки (a_1, a_2, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_4, a_5, a_6), при $n \geq 6$, са елементи от $K_H(n,m)$

Може да се забележи, че $|K_H(n,m)| = n.(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

// Пример: Колко думи може да образуваме над азбуката $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ без да повтаряме буква.

Отговорът е $|K_H(4,4)| = 4.3.2.1 = 4! = 24$.

Ако се пита колко е броят на тези думи, но с дължина 3, отговорът е $|K_H(4,3)| = 4.3.2 = 24$

// Пример: $A = \{1, 2, 3\}$.

$K_H(3,2) = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

зад① По колко начина могат да се наредят в редица 9 момчета и 17 момичета?

Отг: $26!$

зад② По колко начина могат да се наредят в редица 9 момчета и 17 момичета като всички момчета са едно до друго?

Решение: Щом момчетата трябва да са едно до друго, то може да ги разглеждаме като един обект. Тогава имаме 18 обекта, които да разположим в редица, последното може да направим по 18! начина. Тъй като момчетата са различни, то за всеки един от тези 18! начина различаваме 9! наредби (вътрешни между момчетата)

Отговорът е $18! \cdot 9!$

Стана ясно, че $|K_H(n,n)| = n!$

Зад③ Колко думи има над азбуката $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ с дължина 8, съдържащи поддумата "ABC" и не съдържащи повтарящи се букви?

Решение:

Отново разглеждаме "ABC" като отделен блок. Тогава въпросът става по колко начина може да наредим 6 обекта в редица?

Отговор: 6!

2) Конфигурации с наредба и с повторение

- това са наредени m-торки от елементите на A, където всеки от елементите може да се среща 0, 1 или m пъти

Множеството от тези конфигурации бележим с "$K_{H,n}(n,m)$"

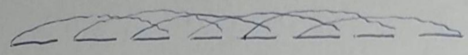
// Пример: Ако $m = 3$, то наредените тройки (a_1, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_1), (a_1, a_3, a_2) са елементи на $K_{H,n}(n, 3)$, $n \geq 3$

По принципа на умножението получаваме:

$$|K_{H,n}(n,m)| = n^m$$

Зад④ Колко са думите с дължина 8 над азбуката $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, съдържащи поддумата "ABC"? (Позволено е повтаряне на елементи с изключение на буквите A, B и C)

Решение: Отново разглеждаме поддумата "ABC" като самосто-ятелна единица. Тя може да бъде разположена на $8-2=6$ места:



// Изобщо, ако имаме обект, заемащ k позиции, и трябва да го разположим сред n-те позиции, то може да го направим по $n-k+1$ начина

Например, ако $k=1$, то за обектът ще има $n-\overset{1}{k}+1 = n$ позиции, на които да бъде разположен //

След като "заемем" три места за обекти "ABC" ни остават 5 позиции, на които може да разположим всяка от ~~осемте~~ петте букви. Следователно, отговорът е: $6 \cdot 5^5$

// **Пример:** $A = \{1,2,3\}$

$$K_{н,п}(3,2) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

3) Конфигурации без наредба и без повторение

- това са m-елементните подмножества на A

Множеството от тези конфигурации бележим с "$K(n,m)$"

Известно е, че $|K(n,m)| = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}$

Вижда се, че $\underbrace{|K(n,m)|}_{\text{брой класове на екв.}} = \frac{|K_н(n,m)|}{|K_н(m,m)|} = \frac{|K_н(n,m)|}{m!}$ → общ брой

↳ кардиналността на класовете на еквивалентност

// **Пример:** $A = \{1,2,3\}$

$$K(3,2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

зад 5) По колко начина може да раздадем 5 карти от тесте с 52?

Решение: Тъй като редът няма значение, отговорът е $\binom{52}{5} =$
$|K(52,5)| = \frac{52!}{5!\,47!}$

зад. 6 Колко са булевите вектори с дължина n, съдържащи точно r 1-ци?

Решение: Позициите на r-те 1-ци в тези вектори сформират r-елементно подмножество на $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. С други думи се пита колко са r-елементните подмножества на $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, но ние знаем, че те са точно $|K(m,r)| = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

+**зад. 7** О. Колко отбора могат да се съставят от група, състояща се от 9 момчета и 11 момичета, като се изисква да се изберат точно 3 момичета и 4 момчета?

Решение:

Ще използваме метода на умножението. Има $|K(9,3)|$ начина да изберем трите момичета и за всеки от тези начини има $|K(11,4)|$ начина да се изберат четирите момчета, съответно отговорът е: $|K(9,3)| \cdot |K(11,4)| = \frac{9!}{6!\,3!} \cdot \frac{11!}{7!\,4!} = 27,720$

• **Биномен коефициент**

Броят на елементите на множеството $K(n,m)$ бележим с $\binom{n}{m}$ - броят на m-елементните подмножества над n-елементно множество.

Нарича се така, тъй като се появява като коефициент пред събираемите $x^i y^{n-i}$ след разгръщане на двучлена $(x+y)^n$

→ **Свойства:**

1) $\binom{n}{m} = \binom{n}{m-m}$

- От комбинаторни съображения дали ще изберем n елемента, които да "влязат" в изграждащата от нас конфигурация, или ще изберем n-m елемента, които да не влязат е едно и също. Избирането на m елемента еднозначно определя останалите n-m елемента.

// **Пример:** По колко начина може да изберем елемент от $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Избирайки елемент 1 еднозначно определяме кои елементи "остават", а именно - 2 и 3 и обратно, избирайки елементите 2 и 3 да "останат" еднозначно определяме елементът, който ще "вземем" - 1

Същата логика важи и за останалите два елемента - 2 и 3.

$$\Rightarrow \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{3!\,1!}, \qquad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!}$$

- По друг начин:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \qquad (\triangle)$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-(n-m))!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad (\square)$$

Очевидно $(\triangle) = (\square)$

2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

От комбинаторни съображения, ~~лявата~~ дясната част брои всички подмножества на n-елементно множество. Лявата част прави същото, но по-подробно - брои всички подмножества чрез разбиване на кардиналност

3) Нека $n, m \geq 1$. Тогава

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

- д-во чрез комбинаторни разс.
- Чрез разгръщане:

$$\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!\,m!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-1-m+1)!} = \frac{(n-1)!\,(n-m) + (n-1)!\,m}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-m+m)}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: \; (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

зад(8) - от сем. контролно 2016

По колко начина може да се състави парола от седем различни арабски цифри и три различни малки латински букви.

Решение:

Латинските букви са 26, ние трябва да изберем 3 от тях, без значение реда им.

Това може да стане по $\binom{26}{3}$ начина

Арабските цифри са 10, ние трябва да изберем 7 от тях, без значение реда им.

Това може да стане по $\binom{10}{3}$ начина.

За всеки избор на 3 букви има по $\binom{10}{3}$ избора за 7 цифри.

То тогава нашите 10 обекта (от които ще изграждаме паролата) може да изберем по $\binom{26}{3} \cdot \binom{10}{3}$ начина.

Разполагаме с 10-те обекта - 2 по 2 различни. Трябва да ги подредим в редица. Това може да стане по 10! начина.

Отговорът е: $\binom{26}{3} \cdot \binom{10}{3} \cdot 10!$

зад(9) По колко начина може да разделим 52 карти на 2 купчици всяка с по 26 карти и всяка съдържаща по две дами?

Решение:

Избирайки две дами за първата купчина, еднозначно определяме дамите за втората купчина, - а именно останалите две

Това може да направим по $\binom{4}{2}$ начина.

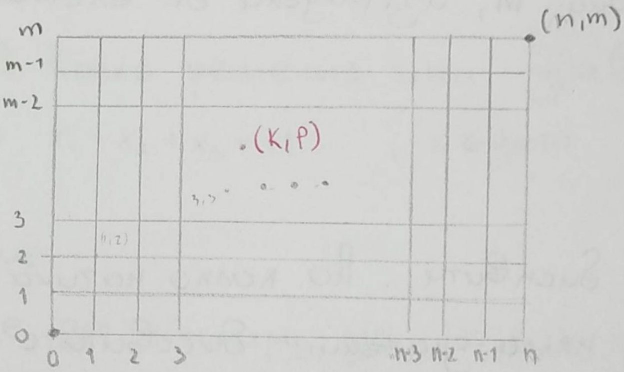
Остава да изберем останалите 24 карти за първата купчина.

Правейки това, еднозначно определяме останалите карти за втората купчина. Последното може да направим по $\binom{48}{24}$ начина. (След отделението на четирите дами в обучата купчина остават 48 карти)

Следователно. отговорът е $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{24}$

Зад (10) "Разходки в мрежа"

Нека имаме правоъгълна мрежа $n \times m$:



Искаме да стигнем от точка $(0,0)$ до точка (n,m). По колко начина може да стане това? // Позволени са ходове единствено ↑, →

Съществува биекция м/у множеството от тези "разходки" и множеството от булевите вектори с дължина $n+m$, съдържащи m единици. Може да се каже, че тези булеви вектори кодират разходките. На позиция i в булевия вектор има '1', ако i-тият ни ход в мрежата е бил ход нагоре и 0, ако i-тият ни ход е бил ход надясно. Тъй като трябва да стигнем точка (n,m), (втората координата е m), то е ясно, че трябва да направим m хода нагоре. Останалите $n-m$ хода са ходове надясно.

Отговорът се свежда до това да кажем колко са булевите вектори с дължина $n+m$, съдържащи m единици. От предна задача знаем, че този брой е $\binom{n+m}{m}$ // Избираме m-елементно подмножество на $\{1,2,\dots,n+m\}$. Всяко това подмножество отговаря на това на кои позиции са единиците. Например, ако $n+m=5$ и $m=2$, то подмножеството $\{1,3\}$ отговаря на булевия вектор $\underset{1}{1}\underset{2}{0}\underset{3}{1}\underset{4}{0}\underset{5}{0}$ //

Ако освен това се иска по пътя до (n,m) да се мине през точка с координати (k,p), то разбиваме задачата на две подзадачи: По колко начина може да стигнем от точка $(0,0)$ до точка (k,p) и по колко начина може да стигнем от точка (k,p) до точка (n,m). Отговорът на първия въпрос е: $\binom{k+p}{p}$. Отговорът на втория: $\binom{(n-k)+(m-p)}{n-k}$

Отговорът на първоначалната задача е $\binom{k+p}{p}\cdot\binom{(n-k)+(m-p)}{n-k}$

4) Конфигурации с повторяне, без наредба

Това са мултимножествата с големина m, изградени от елементите на A.

// Пример-задача (11)

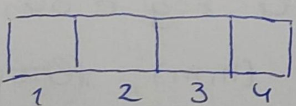
В магазин продават четири вида бисквити. По колко начина може да изберем 6 бисквити. Наредбата няма значение, бисквитите от вид са две по две еднакви. Бисквитите от всеки вид са поне 6 на брой

Решение:

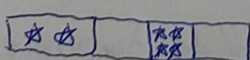
Тъй като редът на избиране няма значение и от всеки вид може да се изберат ≥ 0 бисквити, то задачата се свежда до търсене на конфигурации с повторяне и без наредба.

Такива задачи могат да се решат чрез следния метод

Нека ~~магазинът~~ има 4 отделения - по един за всеки вид бисквити



Тези "отделения" се разделят от 3 разделителя. Избирането на 6 бисквити съответства на разполагането на 6 маркера - '$\star$', например, в тези кутии.

Пример:  - избрали сме 2 бисквити от първи вид и 4 бисквити от трети вид

Горното е еквивалентно на

$\star\star||\star\star\star\star|$

Тоест, задачата се свежда до това по колко начина може да подредим 6 обекта от един тип и 3 обекта от друг тип в редица. Но това е същото като да намерим колко са булевите вектори с дължина $6+3=9$, съдържащи 3 единици. Отговорът на последното е $\binom{6+3}{3}=\binom{9}{3}$

Извежда се, че

$$|K_n(n,m)| = \binom{\overset{\text{първи тип}}{n-1} + \overset{\text{втори тип}}{m}}{n-1} = \binom{n-1+m}{m}$$

зад. 12 Колко решения има уравнението

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, където $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$?

Решение:

Може да мислим за x_1, x_2, x_3 като за кутии, в които разполагаме единици и общият брой на единиците в кутиите е равен на 11.

Аналогия с предната задача: x_1, x_2, x_3 са видовете бисквити, ние трябва да изберем ~~10~~ 11 от тях.

// ~~избираме~~ 11 елемента

// Примерното решение: $x_1 = 9$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ може да представим по следния начин: ★★★★★★★★★ | ★★ |

↳ 9 елемента от x_1

2 елемента от x_2

0 елементи от x_3

Спрямо предната задача, отговорът е $\binom{11+3-1}{3-1} = \binom{11+3-1}{11}$

б) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, където $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$ и $x_1 \geq 1$ и $x_2 \geq 2$ и $x_3 \geq 3$.

Решение:

Нека сме "разположили" една '1'-ца в x_1, две единици в x_2 и три единици в x_3. Тъй като единиците са неразличими, горното може да направим точно по един начин. Остава да "раздадем" останалите 5 единици измежду x_1, x_2, x_3. Последното може да направим по $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$ решения.

зад 13 - от сем. контролно

По колко начина може да раздадем 90 еднакви билета на 30 човека, така че всеки човек да получи поне един билет?

Решение: Ако правим съпоставка с предните две задачи, тук

Хората са различимите кутии / $x_1, \dots, x_3$, а билетите са обектите, които трябва да слагаме в тях.

Отговорът е: $\binom{60 + 30-1}{30-1} = \binom{60+30-1}{60} = \binom{89}{60}$

// Раздаваме по един билет на всеки човек. Тъй като са неразличими и редът няма значение, предното може да направим точно по един начин. Останалите 90-30 = 60 билета може да раздадем / "разположим в кутиите" по $\binom{89}{60}$ начина.

Пермутации с повторения

Говорим за пермутации с повторения когато подреждаме обекти от множество, в което има неразличими елементи

// Пример: Колко стринга могат да се получат от преподреждане / разместване на буквите в думата success?

Решение:

Отговорът НЕ е 7!

Нека разположим буквите 's'. Това може да стане по $\binom{7}{3}$ начина, оставяйки 4 свободни позиции.

Разполагаме буквите 'c'. Това може да стане по $\binom{4}{2}$ начина.

Буквата 'u' може да разположим по $\binom{2}{1}$ начина. Остава една свободна позиция за буквата 'e' - избираме я по $\binom{1}{1}$ начина.

Според принципа на умножението отговорът е

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$$

// Буквите 's' може да разположим по $\binom{7}{3}$ начина, тъй като това е броят начини да изберем 3-елементно подмножество на $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Например м-вото $\{4,6,7\}$ означава, че 's'-овете са на позиции 4, 6 и 7, наредба не ни трябва тъй като 's'-овете са неразличими. Аналогично за останалите букви.

Зад (13) Колко са анаграмите на думата „математика", които не съдържат поддумите „имат" „мак" и „ек"?

// анаграма - получава се от същата дума чрез разместване на буквите

Решение:

$|U| = \frac{10!}{3!\,2!\,2!}$ - "премахваме" вътрешните разместванията на еднаквите обекти

Дефинираме множеството

$A = \{ x \mid x$ е анаграма на „математика" и x съдържа поддума „имат" или „мак", или „ек"$\}$.

Отговорът е $|U| - |A|$

Ще намерим $|A|$.

Дефинираме множествата:

$A_1 = \{ x \mid$ "—" съдържа "имат"$\}$

$A_2 = \{ x \mid$ "—" съдържа "мак"$\}$

$A_3 = \{ x \mid$ "—" съдържа "ек"$\}$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

По принципа на вкл.-изкл. $|A| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Нека намерим $|A_i|$, за $i = \overline{1,3}$

От предна задача знаем, че възможните начини да разположим обект, заемащ к позиции, "върху" n-позиции е $n-k+1$ ($k \leq n$)

Считаме "имат" за един обект.

може да бъде разположен по $10-4+1 = 7$ места. За останалите 6 места разполагаме останалите букви

$|A_1| = \frac{7 \cdot 6!}{2!}$

'а' се повтаря два пъти

Аналогично,

$|A_2| = \frac{8 \cdot 7!}{2!\,2!}$; $|A_3| = \frac{9 \cdot 8!}{3!\,2!\,2!}$

Тогава $\sum_{i=1}^{3}|A_i| = \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!2!} + \frac{9!}{3!2!2!}$

$|A_1 \cap A_3| = \frac{30.4!}{2!}$

$|A_1 \cap A_2| = 20.3!$

$|A_2 \cap A_3| = \cancel{37.8!}\ 0$; $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

Отговорът е

$\frac{10!}{2!2!3!} - \frac{7!}{2!} + \frac{8!}{2!2!} + \frac{9!}{3!2!2!} - \frac{30.4!}{2!} - 20.3! - 0 + 0$

Зад 14 $f: A \to B$; $|A| = n$; $|B| = m$, $n, m \in \mathbb{N}$

а) Колко са възможните ф-ции?

- m^n

б) Колко са биекциите?

ако $n \neq m$, то са 0

ако $m = n$, то те са $n!$

в) Колко са инекциите?

$m(m-1)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$

г) Колко са сюрекциите?

По принципа на вкл-изкл.

За да бъде f сюрекция, то всеки елемент на b трябва да има праобраз. Противното на това е да съществува поне един елемент b, който няма праобраз. Нека дефинираме

$A_i = \{ f: A \to B \mid$ i-тия елемент в B (b_i) няма праобраз$\}$

Нека $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

Тогава $\{A, \bar{A}\}$ е разбиване на м-вото от всички функции $f: A \to B$

Тогава Отговорът е $|U| - |A| = m^n - |A_1 \cup \dots \cup A_m|$

$|U| - |A| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$