ДС Семинар № 9
Теория на Графите

• Граф е теоритико-множествено понятие

• Графите се използват за моделиране на транспортни/комуникационни/социални мрежи както и в много други сфери

// Module Dependency Graph

// Precedence Graphs and Concurrent Processing

// Protein Interaction Graph

// Semantic Networks

...

• Определение

Граф е наредена двойка $G=(V,E)$, $V \neq \emptyset$ е м-во от върховете на G, E е м-во от ребрата на G, като

$$E \subseteq \{x \subseteq V : |x| = 2\}$$

С други думи E съдържа двуелементни подмножества на V

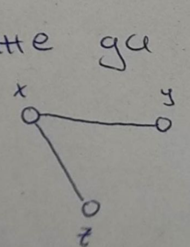
Като казваме само "граф" имаме предвид неориентиран, без възможни примки.

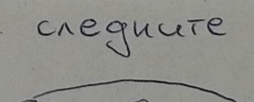
Нека $G=(V,E)$ е граф. Тогава G има графично представяне, което по същината си е различно от G: G е наредена двойка, докато графичното представяне е за "онагледяване" - "рисунка".

// Пример:

$G=(V,E)$, където $V=\{x,y,z\}$, $E=\{\{x,y\},\{x,z\}\}$

Може да онагледим G чрез следните рисунки:

1) 

2) 

това са само две от безбройните представяния

В текущия контекст (x,y) и (x,z) не са наредени двойки.
(Използваме нотацията на наредена двойка)

\+ Колко са двуелементните подмножества на $V : |V| = n$

\- $\binom{n}{2}$ - толкова е и горната граница за броя на ребрата на неориентиран, обикновен граф. без възможни примки

· Конвенция

$|V| = n$ и $|E| = m$

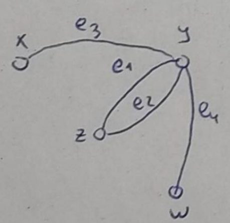
· **Определение**

Мултиграф е наредена тройка $G = (V, E, f_G)$: $V \neq \emptyset$ - м-во от върхове, E - множество от ребра, $E \cap V = \emptyset$ (тъй като в случая и V и E са опорни множества) и

$f_G : E \to \{X \subseteq V : |X| = 2\}$ е свързваща функция

// Пример:

$G = (\{x, y, z, w\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$ и $f_g = \{(e_1, \{z,y\}), (e_2, \{z,y\}), (e_3, \{x,y\}), (e_4, \{y,w\})\}$



$f_g(e_1) = \{z, y\} =: f_g(e_2)$

$f_g(e_3) = \{x, y\}$

$f_G(e_4) = \{y, w\}$

\+ Каква функция е f_G?

· **Определение**

Мултиграф с възможни примки е нар. тройка $G = (V, E, f_G)$, $V \neq \emptyset$ - м-во от върхове, E - м-во от ребра, $V \cap E = \emptyset$ и

$f_G : E \to \{X \subseteq V : |X| = 2 \lor |X| = 1\}$

• Съседство

Нека $G=(V,E)$ е граф. $\forall u,v\in V$ казваме, че върховете u,v са съседи, ако $(u,v)\in E$.

• Инцидентност

Нека $G=(V,E)$ е граф. $\forall e_1,e_2\in E: e_1\cap e_2\neq\emptyset$ казваме, че e_1 и e_2 са инцидентни.

За всеки връх u и всяко ребро e, такова че $u\in e$ казваме, че реброто e е инцидентно с връх u.

• Степен на връх

Нека $G=(V,E)$ е граф. $\forall u\in V$, $N(u)\overset{def}{=}\{v\in V \mid u$ и v са съседи$\}$,

$N[u]\overset{def}{=}N(u)\cup\{u\}$ и $J(u)\overset{def}{=}\{e\in E \mid e$ е инцидентно с $u\}$

Степен на $u\in V$ е $|J(u)| =: d(u)$

$\Delta(G)$ е максималната степен на връх в G

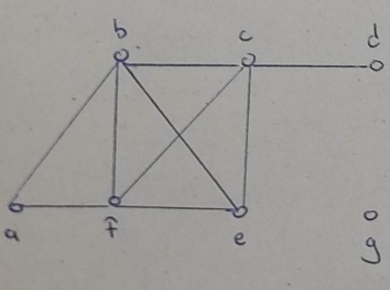
$\delta(G)$ е минималната степен на връх в G

+ Каква е горната граница на $\Delta(G)$? (G е граф) → без примки

Всеки връх може да е съсед на най-много всички останали върхове → $\Delta(G)\le n-1$

// Пример:

Нека $G=(V,E)$ е граф и има графично представяне



Степените на върховете са:

$d(a)=2$

$d(b)=d(c)=d(f)=4$

$d(d)=1$

$d(e)=3$

$d(g)=0$

Съседите на върховете са:

$N(a)=\{b,f\}$

$N(b)=\{a,f,e,c\}$

$N(c)=\{b,f,e,d\}$

$N(d)=\{c\}$

$N(e)=\{f,b,c\}$

$N(f)=\{a,b,c,e\}$

$N(g)=\emptyset$

Връх от степен $=0$ се нарича изолиран връх.

В горния пример g е изолиран.

В примера $\sum_{u \in V} d(u) = 18 = 2.9 = 2.m$

$\Downarrow$

За всеки граф $G=(V,E)$ е изпълнено:

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2m$$

тъй като лявата сума брои всяко ребро два пъти

- Нека $G=(V,E)$ е граф

G е k-регулярен, ако $\forall u \in V: d(u) = k$.

G е регулярен, ако е k-регулярен за някое $k \in \mathbb{N}$

G е пълен граф, ако има всички възможни ребра, тоест има ребро м/у всеки два върха, такъв граф се бележи с K_n, където $|V| = n$

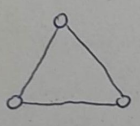
- Колко регулярен е K_n?

  - $n-1$

- K_n има $\binom{n}{2}$ ребра.

// Пример:

K_3 може да се онагледи по следния начин



- Степен на връх в мултиграф с възможни примки

Нека $G=(V,E,f_G)$ е мултиграф с възможни примки.
$\forall u \in V$ степента на u е сумата от броя на ребрата, инцидентни с u, които не са примки, и два пъти броя на примките на u

С това определение резултатът $\sum_{u \in V} d(u) = 2m$ е в сила и за мултиграфи с възможни примки

• Пътища и цикли

Нека $G=(V,E)$ е граф. Път в G наричаме всяка алтернираща редица от върхове и ребра, за някое $t\geq 0$:

$$p=(u_{i_0}, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, \dots, u_{i_{t-1}}, e_{k_{t-1}}, u_{i_t})$$

където $u_{i_p}\in V : 0\leq p\leq t$, $e_{k_p}\in E : 0\leq p\leq t-1$ и е изпълнено, че всеки две последователни ребра са инцидентни ($e_{k_p}=(u_{i_p}, u_{i_{p+1}}) : 0\leq p\leq t-1$)

Дължината на пътя е броят на ребрата в него. Бележим с "$|p|$".

Ако всички елементи на пътя - върхове и ребра - са уникални, казваме, че p е прост път.

Казваме, че p е цикъл, ако $u_{i_0}=u_{i_t}$

Казваме, че p е прост цикъл, ако p е цикъл с поне едно ребро и освен това, всички ел-ти, освен $u_{i_0}=u_{i_t}$ са уникални.

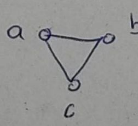
зад. 1 От сем. контролно 2015г.

Да се намерят броя на простите цикли-подграфи на K_4 и K_6.

Пояснения: Всеки прост цикъл съответства на конкретен подграф, нещо повече, ако например редиците от върхове:

a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a

са цикли в граф G, то те съответстват на един и същи подграф на G, а именно на



Решение:

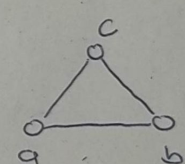
Колко най-малко ~~върха~~ ребра имат простите цикли в граф G?

Тъй като разглеждаме само прости цикли, то този цикъл трябва да има поне едно ребро и всички елементи от цикъла,

с изключение на краищата му, трябва да са уникални.
Тъй като G е граф, и казахме, че използваме "граф" за да кажем, че говорим за обикновен (не мултиграф), неориентиран граф без възможни примки, то не може и да има цикъл с дължина 2. Тоест най-къс прост цикъл в граф G е с дължина 3.

• Ще отбележим следното
Всеки цикъл-подграф с n върха има точно 2n различни представяния като поредици от върхове.
Това е така тъй като, ако генерираме горепосочените редици, то за първи елемент на редицата може да избираме от n върха, а за всяко конкретно избиране на първи елемент-връх, неформално казано, може да ~~изброим~~ изредим останалите върхове от цикъла-подграф, тръгвайки наляво или, тръгвайки надясно

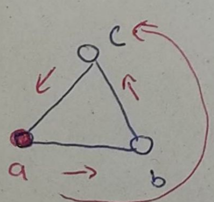
//Пример: Нека цикъла-подграф е има представяне



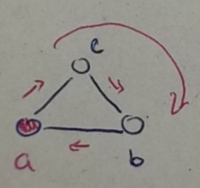
Тогава различните цикли, съответстващи на този граф са:

1) Избираме първи/стартов връх за цикъла

1) a

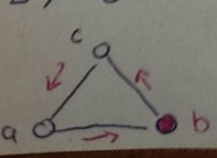


$p_1 = abca$

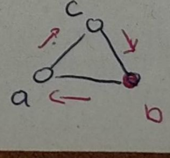


$p_2 = acba$

2) b

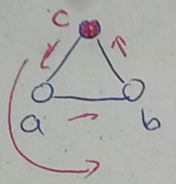


$p_3 = bcab$;

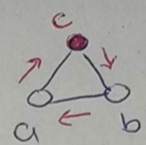


$p_4 = bacb$

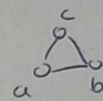
3) c



$P_5 = cabc$;



$P_6 = cbac$

Получихме 6 различни цикъла за подграфа 

• Ще отбележим следното

Тъй като K_n има ребро между всеки два върха, то всяка пермутация на 3 върха от K_n ще представлява цикъл в K_n. Изобщо, всяка пермутация на $k > 2$ върха от K_n еднозначно определя цикъл с дължина k

Колко са всички цикли в K_n?

↳ $\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} k!$

По $\binom{n}{k}$ начина избираме кои $k \geq 3$ върха ще участват в цикъла

По-горе отбелязахме, че всеки цикъл-подграф с k върха има $2k$ различни представяния. Следователно $\binom{n}{k} k!$ брои $2k$ пъти всеки цикъл-подграф. Тоест броят на всички цикли-подграфи в K_n е $\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2k}$

Тогава търсените бройки за K_4 и K_6 са:

K_4 : $\binom{4}{3} \frac{3!}{2.3} + \binom{4}{4} \frac{4!}{2.4} = 4 + 3 = 7$

K_6 : $\binom{6}{3} \frac{3!}{2.3} + \binom{6}{4} \frac{4!}{2.4} + \binom{6}{5} \frac{5!}{2.5} + \binom{6}{6} \frac{6!}{2.6} = 197$

• Свързаност в граф. Свързан граф.

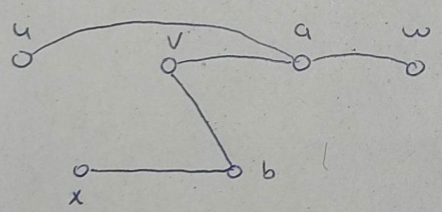
Нека $G=(V,E)$ е граф. За всеки два върха $u,v \in V$ казваме, че u и v са свързани, ако съществува u-v път. G е свързан, ако всеки два върха в него са свързани.

Въвежда се релацията $Q_G \subseteq V \times V$: $\forall u,v \in V: u Q_G v \Leftrightarrow u$ и v са свързани.
Тази релация наричаме релация на достижимост.

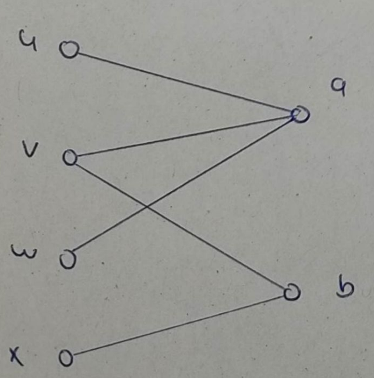
· Нека G е граф. Ако съществува разбиване на V на две подмножества V_1 и V_2, такива, че $\forall (u,v) \in E: u \in V_1 \wedge v \in V_2$, казваме, че G е двуделен граф.
Множествата V_1 и V_2 са тъкмо делове на G

· Пример:

Нека $G = (\{a, b, u, v, w, x\}, \{(u,a), (v,a), (v,b), (w,a), (x,b)\})$ има графично представяне:



Дали G е двуделен? Да. G може да се онагледи и така



където $V_1 = \{u, v, w, x\}$ и $V_2 = \{a, b\}$ са деловете на G

(7) Колко са двуделните разбивания на множество $A: |A| = n$?
(Колко са двуелементните разбивания на м-во $A: |A| = n$?)

Решение: (в записките за м-ва)

За да е разбиване едно м-во X на A трябва...

Всеки елемент на разбиването е подмножество на A. Всичките подмножества на A са 2^n на брой. Всяко едно такова подмножество, различно от празното, еднозначно определя двуелементно разбиване.

Ако $Y \subseteq A : Y \neq \emptyset$, то $X = \{Y, \overline{Y}\}$ е разбиване (двуелементно) на A, ~~A~~ различно от празното, тъй като разбиването не може да съдържа $\emptyset$. Но $\overline{Y}$ определя същото разбиване $X = \{\overline{Y}, Y\}$. Следователно $\forall Y \subseteq A, Y \neq \emptyset : Y$ и $\overline{Y}$ определят едно и също разбиване.

Следователно отговорът е $\frac{2^n}{2} - 1 = 2^{n-1} \underbrace{-1}_{\text{премахване } \emptyset}$

зад. 3 От семестриално контролно 2017г.

Нека $G = (V, E)$ е граф.

а) Дсд, че ако G е двуделен граф с делове V_1 и V_2, то

$$\sum_{u \in V_1} d(u) = \sum_{u \in V_2} d(u)$$

б) Дсд, че ако следните две условия са изпълнени:

$\left.\begin{array}{l} 1)\ \exists p \in \mathbb{N} : |V| = 2p+1 \\ 2)\ \exists p \in \mathbb{N}^+ ; \forall u \in V : d(u) = p, \end{array}\right\}$ да се внимава за обхвата на кванторите

то G не е двуделен

Решение:

а) От G - двуделен и V_1, V_2 - деловете на G знаем, че

$\neg \exists (u,v) \in E : (u \in V_1 \land v \in V_1) \lor (u \in V_2 \land v \in V_2)$

$\equiv \forall (u,v) \in E : (u \notin V_1 \lor v \notin V_1) \land (u \notin V_2 \lor v \notin V_2)$

Тоест от дефиницията за двуделност знаем, че за всяко ребро $(u,v) \in E$ краищата му са от различни делове. Тоест ребрата м/у деловете са всички ребра на G. От това, че няма "вътрешни" ребра по отношение на V_1 и V_2 и от дефиницията за степен на връх :

$\sum\limits_{u\in V_1} d(u)$ брои всяко ребро на G точно веднъж, същото се

отнася и за $\sum\limits_{u\in V_2} d(u)$

Тоест $\sum\limits_{u\in V_1} d(u) = m = \sum\limits_{u\in V_2} d(u)$

б) Ще използваме твърдението от а)

Допускаме, че G е двуделен. От а): $\sum\limits_{u\in V_1} d(u) = \sum\limits_{u\in V_2} d(u)$

По условие вс върхове са от една и съща степен p.

Тогава $\sum\limits_{u\in V_1} d(u) = p|V_1|$ и $\sum\limits_{u\in V_2} d(u) = p|V_2|$

$\Rightarrow p|V_1| = p|V_2| \Rightarrow |V_1| = |V_2| \rightarrow |V_1 \cup V_2| = 2k$, $k = |V_1|$

Тоест $|V|$ е четно число, което противоречи с второто условие.

// Ако мислим за съждителна логика, то горното д-во е д-во на $p \land q \rightarrow t$, където

p е съждението $\exists p' \in \mathbb{N} : |V| = 2p'+1$

q е съждението $\exists p'' \in \mathbb{N}^+ \forall u \in V : d(u) = p''$

t е съждението G не е двуделен

Ние доказахме, че $\neg t \land q \overset{(\Delta)}{\rightarrow} \neg p$ е истина, което $\overset{(\Delta)}{\vee}$ е еквивалентно на

$\neg t \rightarrow \neg(q \land p) \equiv (q \land p) \rightarrow t$