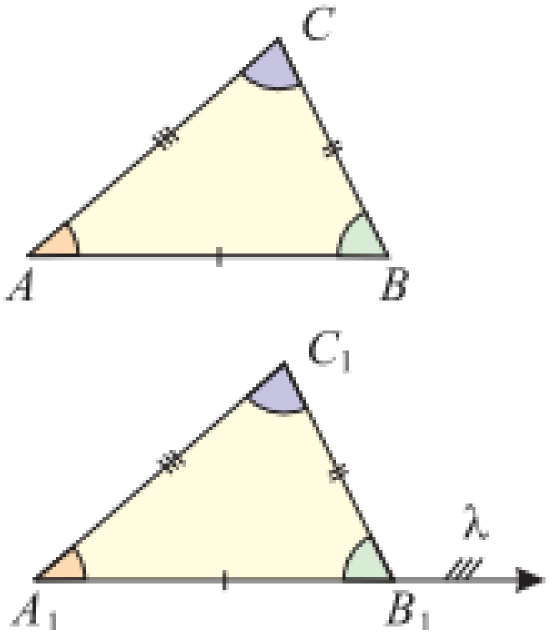
Еднакви триъгълници

Съдържание

Основни понятия



На чертежа са начертани два триъгълника ABC и $A_1B_1C_1$.
При измерване с линия с деления и с транспортир установяваме, че:

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$;

$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$.

Ако изрежем $\triangle ABC$ и го наложим върху $\triangle A_1B_1C_1$ така, че върхът $A \equiv A_1$ и върхът $B \equiv B_1$, ще установим, че в полуравнината λ е и върхът $C \equiv C_1$. За тези два триъгълника ($\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$) казваме, че са **еднакви.**

Те имат:

- **съответни върхове –** върховете A и A_1, B и B_1, C и C_1, които при налагане съвпадат;
- **съответни страни –** страните AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, които при налагане съвпадат;
- **съответни ъгли –** $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle B_1A_1C_1$, $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle A_1C_1B_1$, които при налагане съвпадат.

Казваме, че:

- Страната A_1B_1 е **съответно равна** на страната AB.
- Страната B_1C_1 е **съответно равна** на страната BC.
- Страната A_1C_1 е **съответно равна** на страната AC.
- Ъгъл A_1 е **съответно равен** на ъгъл A.
- Ъгъл B_1 е **съответно равен** на ъгъл B.
- Ъгъл C_1 е **съответно равен** на ъгъл C.

Определение

Еднакви триъгълници

Два триъгълника, които имат съответно равни страни и съответно равни ъгли, се наричат еднакви.

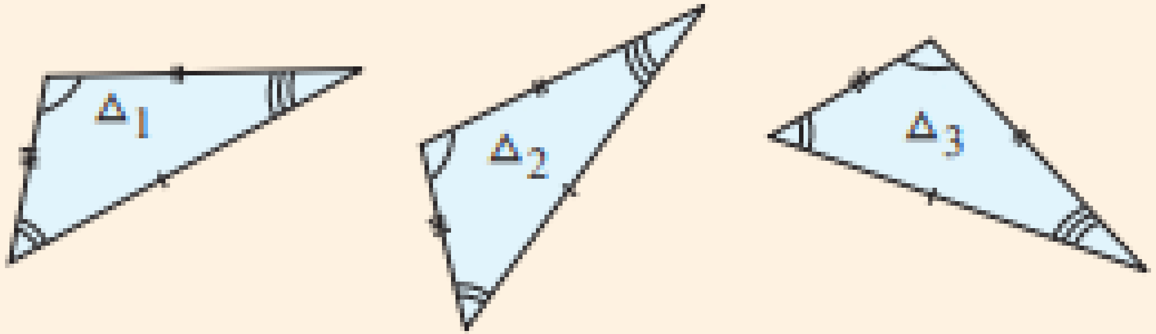
Означения: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Четем: "Триъгълникът ABC е еднакъв на триъгълника $A_1B_1C_1$".

Ако $\begin{matrix} \sphericalangle A = \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B_1 \\ \sphericalangle C = \sphericalangle C_1 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} AB = A_1B_1 \\ BC = B_1C_1 \\ CA = C_1A_1 \end{matrix}$, то $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Прието е записът $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ да показва, че върховете A_1, B_1, C_1 са съответни на върховете A, B, C.

Свойства на еднаквите триъгълници



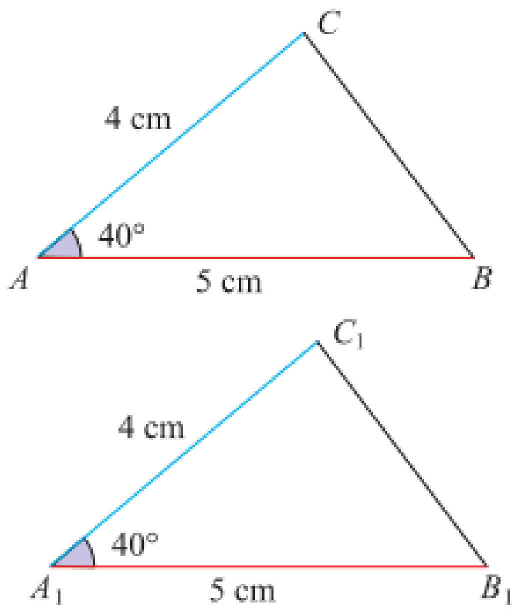
1. Ако $\Delta_1 \cong \Delta_2$, то $\Delta_2 \cong \Delta_1$.

2. Ако $\Delta_1 \cong \Delta_2$ и $\Delta_2 \cong \Delta_3$, то $\Delta_1 \cong \Delta_3$.

Тези свойства са следствия от определението за еднаквост на триъгълници и съответните свойства на числата.

Първи признак за еднаквост на два триъгълника

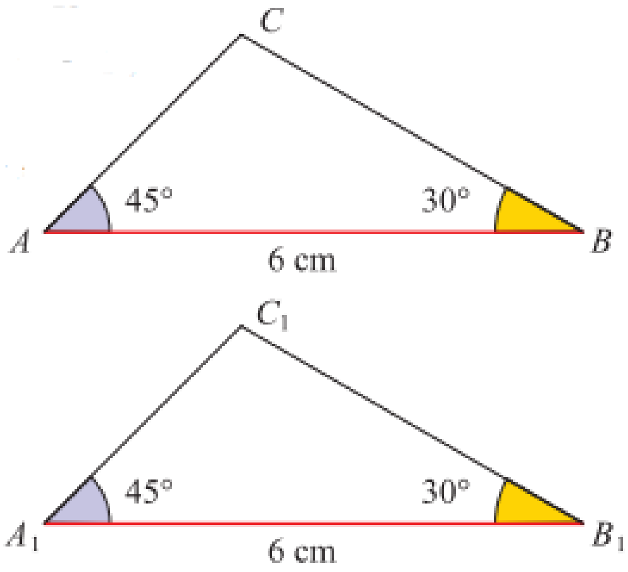
Ако две страни и ъгъл между тях от един триъгълник са съответно равни на две страни и ъгъл между тях от друг триъгълник, то двата триъгълника са еднакви.



$$AB = A_1B_1$$
$$AC = A_1C_1$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$$
$$\Downarrow$$
$$BC = B_1C_1$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$$

Втори признак за еднаквост на два триъгълника

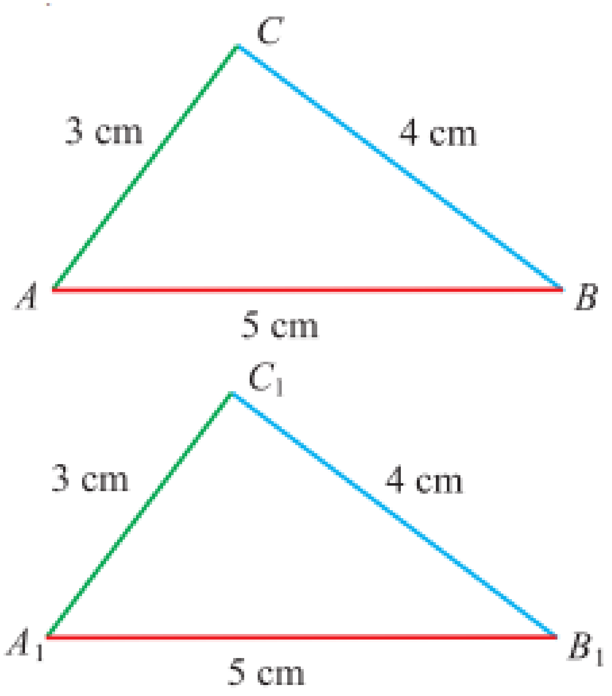
Ако страна и два прилежащи ъгъла на един триъгълник са съответно равни на страна и два прилежащи ъгъла от друг триъгълник, то двата триъгълника са еднакви.



$$AB = A_1B_1$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$$
$$\Downarrow$$
$$BC = B_1C_1$$
$$AC = A_1C_1$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$$

Трети признак за еднаквост на два триъгълника

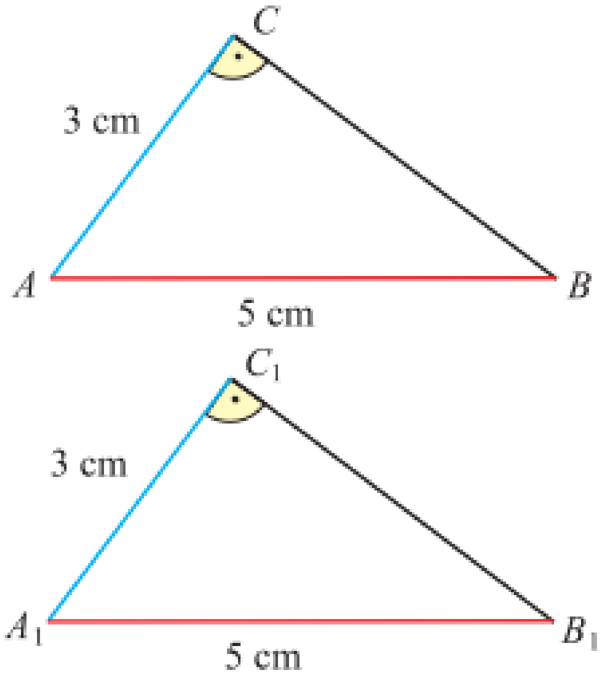
Ако трите страни на един триъгълник са съответно равни на трите страни на друг триъгълник, то двата триъгълника са еднакви.



$$AB = A_1B_1$$
$$BC = B_1C_1$$
$$CA = C_1A_1$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$$

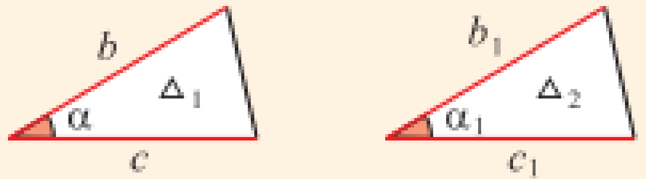
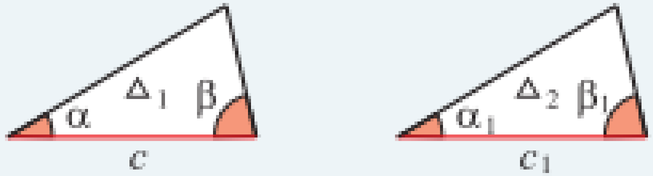
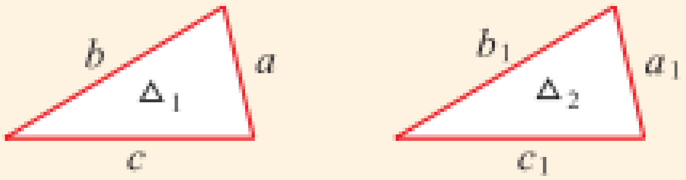
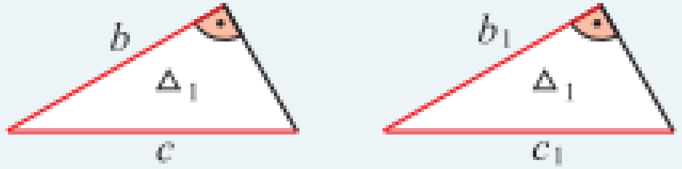
Признак за еднаквост на два правоъгълни триъгълника

Два правоъгълни триъгълника са еднакви, ако катет и хипотенуза от единия триъгълник са съответно равни на катет и хипотенуза от другия триъгълник.



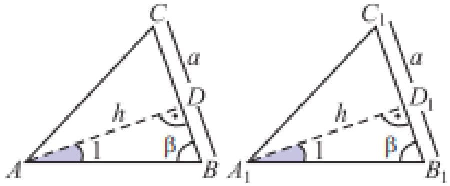
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C_1 = 90^\circ$$
$$AB = A_1B_1$$
$$CA = C_1A_1$$
$$\Downarrow$$
$$BC = B_1C_1$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$$

Обобщение на признаците за еднаквост на два триъгълника

I признак		От $\left. \begin{array}{l} c = c_1 \\ b = b_1 \\ \alpha = \alpha_1 \end{array} \right| \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2$
II признак		От $\left. \begin{array}{l} c = c_1 \\ \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \end{array} \right| \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2$
III признак		От $\left. \begin{array}{l} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \end{array} \right| \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2$
IV признак		От $\left. \begin{array}{l} \gamma = \gamma_1 = 90^\circ \\ b = b_1 \\ c = c_1 \end{array} \right| \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2$

Основни задачи

ЗАДАЧА 4 Докажете, че еднаквите триъгълници са равнолицеви.
Основна задача



Дадено: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

Да се докаже: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$

Доказателство:

1. Начертаваме височините AD и A_1D_1.
Тогава $\sphericalangle ADB = 90°$, $\sphericalangle A_1D_1B_1 = 90°$.

2. $\triangle ABD \cong \triangle A_1B_1D_1$ (по II признак)
$AB = A_1B_1$
$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1 = \beta$
$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1 = \sphericalangle 1$, където $\sphericalangle 1 = 90° - \beta$,

$\Rightarrow AD = A_1D_1$ (съответни страни).

3. Означаваме $AD = A_1D_1 = h$ и $BC = B_1C_1 = a$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC\,.\,AD}{2} = \frac{B_1C_1\,.\,A_1D_1}{2} = \frac{a\,.\,h}{2} = S_{\triangle A_1B_1C_1} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$$

Ако два триъгълника имат по два ъгъла, съответно равни (*Задача 4*), то и третите им ъгли са съответно равни. Тогава два триъгълника са еднакви по II признак и когато имат по страна и два ъгъла, съответно равни.

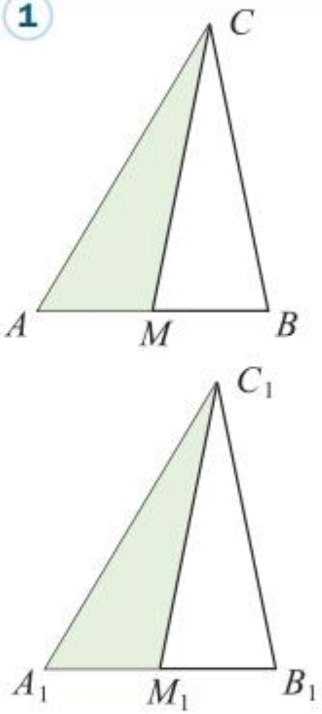
Основни задачи

Да се докаже, че в еднаквите триъгълници:

1. съответните медиани са равни;
2. съответните височини са равни;
3. съответните ъглополовящи са равни.

Основна задача 1

1



Дадено: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, $CM = C_1M_1$ – медиани

Да се докаже: $CM = C_1M_1$

Доказателство:

1. От определението за медиана следва, че точките M и M_1 са среди на AB и A_1B_1.

Тогава $AM = MB = \frac{1}{2}AB$, $A_1M_1 = M_1B_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$.

От $AB = A_1B_1$ (по условие) следва, че

$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1B_1$, т.е. $AM = A_1M_1$.

2. Разглеждаме $\triangle AMC$ и $\triangle A_1M_1C_1$

$AC = A_1C_1$ (по условие)

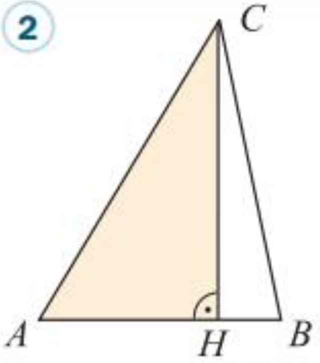
$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ (по условие) $\Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle A_1M_1C_1$

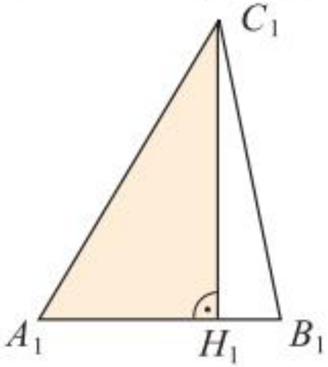
$AM = A_1M_1$ (от **1.**) (по I признак)

$\Rightarrow$ $CM = C_1M_1$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

Основна задача 2

2





Дадено: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, CH и C_1H_1 – височини

Да се докаже: $CH = C_1H_1$

Доказателство:

1. От определението за височина следва, че $CH \perp AB$ и $C_1H_1 \perp A_1B_1$, т.е. $\sphericalangle H = H_1 = 90^\circ$.

2. Разглеждаме $\triangle AHC$ и $\triangle A_1H_1C_1$

$AC = A_1C_1$ (по условие)

$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ (по условие)

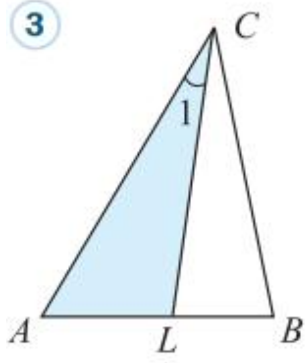
$\sphericalangle H = \sphericalangle H_1 = 90^\circ$ (от **1.**)

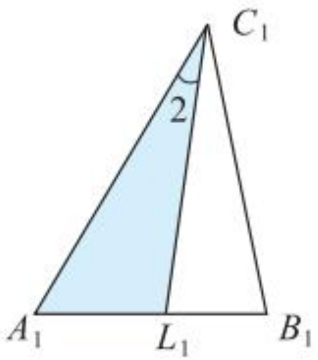
$\Rightarrow$ $\triangle AHC \cong \triangle A_1H_1C_1$ (по II признак)

$\Rightarrow$ $CH = C_1H_1$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

Основна задача 3

3





Дадено: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, CL и C_1L_1 – ъглополовящи

Да се докаже: $CL = C_1L_1$

Доказателство:

1. От определението за ъглополовяща следва, че

$\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\sphericalangle C$ и $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\sphericalangle C_1$.

От $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ (по условие) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

2. Разглеждаме $\triangle ALC$ и $\triangle A_1L_1C_1$

$$\left| \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ \sphericalangle A = \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \triangle ALC \cong \triangle A_1L_1C_1$ (по II признак)

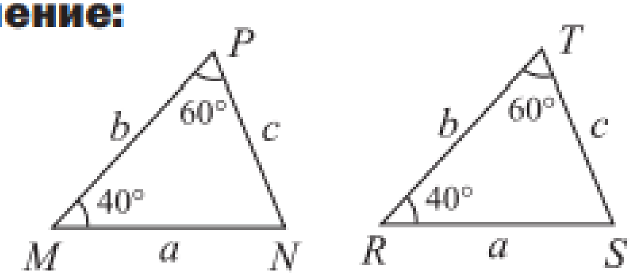
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{CL = C_1L_1}$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

Задачи

Задача 1 (еднакви триъгълници)

Дадени са $\triangle MNP$ и $\triangle RST$ с означени дадени елементи. Да се докаже, че тези триъгълници са еднакви.

Решение:



Триъгълниците MNP и RST имат:

$MN = RS = a$, $\sphericalangle M = \sphericalangle R = 40°$,

$MP = RT = b$, $\sphericalangle P = \sphericalangle T = 60°$,

$PN = TS = c$,

От свойството на ъглите в триъгълник

$\Rightarrow \sphericalangle N = 180° - (40° + 60°) = 80°$ и $\sphericalangle S = 80°$, т.е. $\sphericalangle N = \sphericalangle S = 80°$.

$\triangle MNP$ и $\triangle RST$ имат три двойки съответно равни страни и три двойки съответно равни ъгли, откъдето следва, че са еднакви:

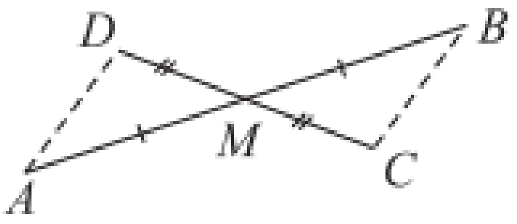
$\triangle MNP \cong \triangle RST$ (по определение).

Теоремите, които определят условия, осигуряващи еднаквостта на два триъгълника, ще наричаме **признаци за еднаквост на два триъгълника**.

Задачи

Задача 2 (Първи признак)

Отсечките AB и CD се пресичат в точка M, която е среда на всяка от тях.
Докажете, че:
а) $AD = BC$;
б) $\sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM$, $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BCM$.



Решение:

а) Разглеждаме $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$ $\left| \begin{array}{l} AM = BM \text{ (по условие)} \\ DM = CM \text{ (по условие)} \\ \sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC \text{ (връхни ъгли)} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \triangle AMD \cong \triangle BMC$ (по I признак)

$\Rightarrow AD = BC$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

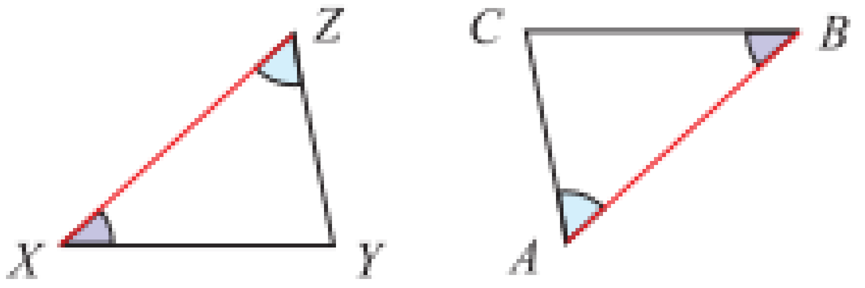
б) От $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (условие а)) $\Rightarrow \begin{array}{l} \sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM \\ \sphericalangle ADM = \sphericalangle BCM \end{array}$ $\Big|$ като съответни ъгли в еднакви триъгълници.

Задачи

Задача 3 (Втори признак)

Приложете втори признак за еднаквост на два триъгълника, като използвате равенствата на съответните им елементи, означени на чертежа.

Решение:

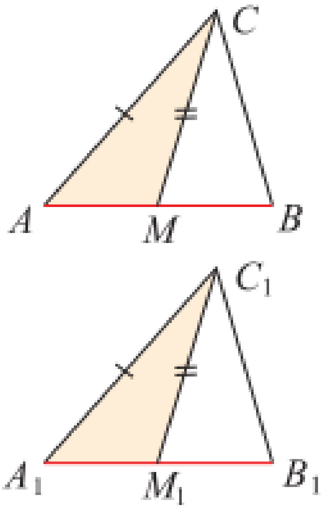


От $\begin{cases} XZ = BA \\ \sphericalangle X = \sphericalangle B \\ \sphericalangle Z = \sphericalangle A \end{cases} \Rightarrow \triangle XYZ \cong \triangle BCA$ (по II признак).

Задачи

Задача 4 (Трети признак)

В триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ точките M и M_1 са среди съответно на страните AB и A_1B_1.



Дадено: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $CM = C_1M_1$

Да се докаже: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

Доказателство:

1. Разглеждаме $\triangle AMC$ и $\triangle A_1M_1C_1$

$$\left|\begin{array}{ll} AC = A_1C_1 & \text{(по условие)} \\ CM = C_1M_1 & \text{(по условие)} \\ AM = A_1M_1 & \left(\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1B_1\right) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle A_1M_1C_1$ (по III признак)

$\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle A_1$.

2. Разглеждаме $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$$\left|\begin{array}{ll} AC = A_1C_1 & \text{(по условие)} \\ AB = A_1B_1 & \text{(по условие)} \\ \sphericalangle A = \sphericalangle A_1 & \text{(от } \mathbf{1.}\text{)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (по I признак).

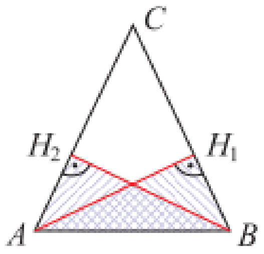
Задачи

Задача 5 (Четвърти признак)

Височините от върховете на два остри ъгла в един триъгълник са равни.
Да се докаже, че триъгълникът е равнобедрен.

Решение:

Разглеждаме три случая:

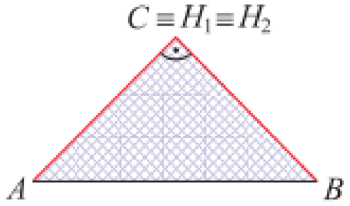


1. $\sphericalangle C < 90^\circ$

Разглеждаме $\triangle ABH_1$ и $\triangle BAH_2$ $\left|\begin{array}{l}\sphericalangle H_1 = \sphericalangle H_2 = 90^\circ\\ AB = AB \text{ (обща страна)}\\ AH_1 = BH_2 \text{ (по условие)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \triangle ABH_1 \cong \triangle BAH_2$ (по IV признак) $\Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$.

$\Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен.



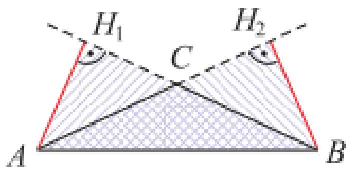
2. $\sphericalangle C = 90^\circ$

От $AC \perp BC \Rightarrow AC \equiv h_a$.

От $BC \perp AC \Rightarrow BC \equiv h_b$.

Но $h_a = h_b$ (по условие) $\Rightarrow AC = BC$

$\Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен.



3. $\sphericalangle C > 90^\circ$.

Разглеждаме $\triangle ABH_1$ и $\triangle BAH_2$ $\left|\begin{array}{l}\sphericalangle H_1 = \sphericalangle H_2 = 90^\circ\\ AB = AB \text{ (обща страна)}\\ AH_1 = BH_2 \text{ (по условие)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \triangle ABH_1 \cong \triangle BAH_2$ (по IV признак) $\Rightarrow \sphericalangle ABH_1 = \sphericalangle BAH_2$

$\Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен.

За домашно

- В курса в мудъл, при темата за еднакви триъгълници има задание със задачи за домашно.
- Също така има и линкове към страници с допълнителни материали, които трябва да бъдат прегледани.

Въпроси?