Упражнение 4 по Дискретни Структури, КН, II поток, зимен семестър 2013-2014 г.

Комбинаторика

---

1 Индукция

Задача 1. Докажете по индукция, че за всяко крайно непразно множество A, броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

Решение: Нека 2^A степенното множество на A. Дефинираме, че:

$$2^A_e = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е четно число.}\}$$
$$2^A_o = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е нечетно число.}\}$$

Задачата се състои в това, да се докаже, че $\forall A$, такова че $A \neq \emptyset$, $|2^A_e| = |2^A_o|$. Доказателството е с индукция по $|A|$.
База: $|A| = 1$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, A\}$$

Очевидно

$$2^A_e = \{\emptyset\}$$
$$2^A_o = \{A\},$$

така че $|2^A_e| = |2^A_o|$ е вярно.
Индуктивна хипотеза: Нека твърдението е вярно за всяко множество A, такова че $|A| = n$. Тоест,

$$\forall A, \text{ такова че } |A| = n\colon |2^A_o| = |2^A_e| \tag{1}$$

Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволно множество A, такова че $|A| = n + 1$. Нека a е произволен елемент на A. Очевидно 2^A се разбива на следните четири подмножества:

$$B_e = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$B_o = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$
$$C_e = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$C_o = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$

Очевидно

$$2^A_e = B_e \cup C_e$$
$$2^A_o = B_o \cup C_o$$

Тъй като $B_e \cap C_e = \emptyset$ и $B_o \cap C_o = \emptyset$,

$$|2_e^A| = |B_e| + |C_e| \tag{2}$$
$$|2_o^A| = |B_o| + |C_o| \tag{3}$$

Нека $A' = A \setminus \{a\}$. Съгласно индуктивната хипотеза (1),

$$|2_e^{A'}| = |2_o^{A'}| \tag{4}$$

Очевидно е, че $2_e^{A'} = C_e$ и $2_o^{A'} = C_o$. Следователно,

$$|C_e| = |C_o| \tag{5}$$

Ще покажем, че $|B_e| = |B_o|$. Забележете, че

$$|B_e| = |C_o| \tag{6}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_e се получава от точно един елемент v на C_o чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_o се получава от точно един елемент z на B_e чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

Аналогично,

$$|B_o| = |C_e| \tag{7}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_o се получава от точно един елемент v на C_e чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_e се получава от точно един елемент z на B_o чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

От (6), (5) и (7) следва, че $|B_e| = |C_o| = |C_e| = |B_o|$, а оттук съгласно транзитивността на равенстото имаме:

$$|B_e| = |B_o| \tag{8}$$

От (5), (8), (2) и (3) следва, че $|2_e^A| = |2_o^A|$. □

Задача 2. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Решение:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} =$$
$$\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ четно}}}(-1)^k\binom{n}{k}\right)+\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ нечетно}}}(-1)^k\binom{n}{k}\right) =$$
$$\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ четно}}}\binom{n}{k}\right)-\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ нечетно}}}\binom{n}{k}\right) \tag{9}$$

Известно е, че $\binom{n}{k}$ е броят на подмножествата, имащи k елемента, на кое да е n-елементно множество A. Тогава, очевидно,

$$\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ четно}}}\binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с четен брой елементи}$$
$$\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ нечетно}}}\binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с нечетен брой елементи}$$

Съгласно Задача 1, тези две суми са еднакви. Следва, че изразът (9) е нула. □

1.1 Засилване на твърдението, което доказваме

В някои случаи доказателството на даденото твърдение "не излиза", въпреки че твърдението е вярно. В такъв случай може да опитаме една техника: да докажем по индукция твърдение, което е по-силно от това, което ни е дадено. По принцип по-силните твърдения се доказват по-трудно, но в някои случаи—колкото и парадоксално да звучи—пи-силните твърдения се доказват по-лесно, ако ползваме индукция.

Задача 3. Докажете, че

$$\text{За всяко } n \geq 1: \ \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \tag{10}$$

Решение, първи опит: Базата е за $n=1$. Лявата страна е $\frac{1}{2}$, а дясната е $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Действително лявата страна е по-малка от дясната. Базовият случай е доказан.

Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност на аргумента n, и разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. За тази стойност, твърдението е

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}}_{A}\times\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}} \tag{11}$$

Съгласно индукционното предположение, изразът, означен с A, е по-малък от $\frac{1}{\sqrt{3n}}$. Прилагайки това към лявата страна на неравенство (11), получаваме

$$A\times\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n}}\times\frac{2n+1}{2n+2}$$

Дали обаче

$$\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$$

С тривиална алгебра се убеждаваме, че не е вярно:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}} && \leftrightarrow \\
\frac{2n+1}{2n+2} &< \sqrt{\frac{n}{n+1}} && \leftrightarrow \\
\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} &< \frac{n}{n+1} && \leftrightarrow \\
4n^3+4n^2+4n+4n^2+4n+1 &< 4n^3+8n^2+4n && \leftrightarrow \\
4n+1 &< 0
\end{aligned}$$

Провалът на доказателството *не означава*, че твърдението е невярно, а само че не сме успели да го докажем *по този начин.*

Решение, втори опит: Ще докажем по индукция следното твърдение

$$\text{За всяко } n \geq 2: \; \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \tag{12}$$

Базата е за $n = 2$. Лявата страна е $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, а дясната е $\frac{1}{\sqrt{7}}$. Действително лявата страна е по-малка от дясната. Базовият случай е доказан.

Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност на аргумента n, и разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. За тази стойност, твърдението е

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}}_{A} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} \tag{13}$$

Съгласно индукционното предположение, изразът, означен с A, е по-малък от $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Прилагайки това към лявата страна на неравенство (13), получаваме

$$A \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Остава да докажем, че

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Действително,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{3n+4}} && \leftrightarrow \\
\frac{2n+1}{2n+2} &< \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} && \leftrightarrow \\
\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} &< \frac{3n+1}{3n+4} && \leftrightarrow \\
12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4 &< 12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4 && \leftrightarrow \\
19n &< 20n
\end{aligned}$$

С това доказателството на (12) приключва. Формално, твърдение (12) не влече твърдение (10), защото (12) е за $n \geq 2$. Но лесно се вижда, че (12) заедно с доказателството на (10) за $n = 1$ са по-силно твърдение от (10). $\square$

Едно интуитивно обяснение защо техниката със засилване на твърдението (понякога) работи е, че доказателство по индукция прилича на катерене по стълба: ние стъпваме на индуктивното предположение и се "качваме" едно ниво нагоре, доказвайки индуктивната стъпка. При по-силно твърдение стъпалото, от което тръгваме, е по-високо.

Техниката със засилване на твърдението *е съвсем различно нещо* от доказателство чрез така наречената силна индукция, когато допускаме твърдението не просто за n, а за всички стойности на аргумента, по-малки или равни на n.

2 Принцип на Дирихле

Задача 4. В 8 чекмеджета има 87 молива. Определете най-голямото цяло число n, такова че задължително има чекмедже с n молива.

Решение: Иначе казано, търсим числото n, такова че твърдението *"Съществува поне едно чекмедже с n молива"* е задължително вярно, но твърдението *"Съществува поне едно чекмедже с $n+1$ молива"* може и да не е вярно. Съгласно обобщения принцип на Дирихле, съществува чекмедже с 11 молива. От друга страна, може да няма чекмедже с 12 молива—когато всички кутии имат по 10 или 11 молива. Отговорът е $n = 11$. $\square$

Задача 5. Дадена е редица от $n^2 + 1$ числа, нито две от които не са равни. Да се докаже, че тази редица съдържа монотонна поредица с дължина $n + 1$.

Пояснение: "Монотонна" означава или нарастваща, или намаляваща. "Поредица" означава числа от редицата, които не са непременно съседи в редицата, но са написани в същата последователност, в която са в редицата. Примерно, ако $n = 3$ и редицата е

$$4,\ 7,\ 11,\ 2,\ 8,\ 3,\ 14,\ 1,\ 6,\ 9$$

монотонна поредица с дължина 4 е $4, 7, 8, 14$:

$$\boxed{4},\ \boxed{7},\ 11,\ 2,\ \boxed{8},\ 3,\ \boxed{14},\ 1,\ 6,\ 9$$

Решение: Да допуснем противното: всяка монотонна поредица е с дължина $\leq n$. Нека A означава дадената редица с дължина $n^2 + 1$:

$$A = a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$$

За всяко i, такова че $1 \leq i \leq n^2 + 1$, дефинираме двете подредици[†]:

$$A^i = a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n^2+1}$$
$$A_i = a_1, a_2, \ldots, a_i$$

За всяко такова i, нека s_i е дължината на най-дълга растяща поредица в A_i с последен елемент a_i и нека t_i е дължината на най-дълга намаляваща поредица в A_i с пръв елемент a_i. Очевидно, $\forall i (s(i) \geq 1 \wedge t(i) \geq 1)$, тъй като такива поредици съдържат поне a_i.

[†]За разлика от поредица, при подредица се иска елементите да са съседи в A

От началното допускане следва, че $\forall i(s_i \leq n \wedge t_i \leq n)$. Следователно,

$$1 \leq s_i \leq n$$
$$1 \leq t_i \leq n$$

за всяко i. Тъй като s_i и t_i вземат цели стойности, следва, че за всяко от тях стойността му е една от най-много n възможни. Прилагайки принципа на умножението заключаваме, че наредената двойка (s_i, t_i) има стойност измежду най-много n^2 възможни. Но i-тата са $n^2 + 1$ на брой. Съгласно принципа па Дирихле, съществуват две различни стойности на променливата i, да ги наречем j и k, такива че $(s_j, t_j) = (s_k, t_k)$, тоест

$$s_j = s_k$$
$$t_j = t_k$$

Да разгледаме елементите на A, които са на позиции j и k, които ние наричаме съответно a_j и a_k. Тъй като всички елементи на A са различни, $a_j \neq a_k$. Да допуснем, че без ограничение на общността, че $j < k$. Значи, a_j и a_k са разположени в A така:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

I Първо да допуснем, че $a_j < a_k$. Тъй като s_j е дължината на най-дълга растяща поредица, завършваща с a_j:

$$A = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_j}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и $a_j < a_k$, то в A има нарастваща поредица с дължина $s_j + 1$, завършваща с a_k; а именно, състояща се от вече споменатата поредица, завършваща с a_j, плюс a_k накрая:

$$A = \underbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_j}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_k}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Но тогава $s_k > s_j$, което противоречи на факта, че по конструкция $s_j = s_k$.
II Сега да допуснем, че $a_j > a_k$. Тъй като t_k е дължината на най-дълга намаляваща поредица, започваща с a_k:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{a_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k}$$

и $a_j > a_k$, то в A има намаляваща поредица с дължина $t_k + 1$, започваща с a_j; а именно, състояща се от вече споменатата поредица, започваща с a_k, плюс a_j в началото:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{a_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{a_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k}}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k+1}$$

Но тогава $t_j > t_k$, което противоречи на факта, че по конструкция $t_j = t_k$.
Следователно, първоначалното ни допускане, че най-дългата монотонна поредица не е по-дълга от n, е погрешно. $\square$

Задача 6. Нека $A = \{10, 11, \ldots, 99\}$. Докажете, че във всяко десет елементно подмножество на A съществуват две непразни непресичащи се подмножества с еднаква сума на елементите.

Решение: Всяко 10 елементно подмножество има $2^{10} - 1 = 1023$ непразни подмножества. От друга страна, $\forall B \subset A$, такова че $1 \leq |B| \leq 10$, е в сила:

$$10 \leq \sum_{x \in B} x \leq 90 + 91 + \ldots 99 = 935$$

Оттук виждаме, че $\sum_{x \in B} x$ има не повече от 935 различни стойности. Но тогава броят на възможните суми е по-малък от броя на подмножествата. Прилагаме принципа на Дирихле и виждаме, че поне две подмножества имат една и съща сума. □

Задача 7. Професор X. твърди, че е създал толкова добра компресираща програма, че с нея може да "свие" произволен файл поне с единица. Възможно ли е това?

Решение: Професорът лъже, ако става дума за компресия без загуба на информация. Под "компресираща програма" се разбира такава програма, който може да възстанови първоначалния файл с точност до един бит. Всяка компресираща програма е частична функция от дадено множество символни последователности (стрингове) в друго множество стрингове. Щом професорът твърди, че неговата програма работи върху всички файлове, значи за дадена дължина n на файла (който ще бъде "свиван"), компресиращата програма реализира *тотална* функция f с домейн с мощност q^n и кодомейн с мощност q^m за $m \leq n - 1$. Тук q е броят на символи във файловете; q е две, ако разглеждаме файловете като булеви вектори, но ако разглеждаме файловете като последователности от байтове, q е $2^8 = 256$. Компресиращите програми трябва да реализират инекции, ако става дума за компресия без загуба на информация. Не е задължително да са биекции, тоест може да не са сюрекции, тоест може да има стрингове, които не са образи на никои стрингове, но инективност е задължителна. Ако компресиращата програма реализира не-инекция, възстановяването на оригиналния файл в някои случаи ще е невъзможно.

Степенният показател в израза за мощността на кодомейна е по-малък от n заради твърдението на професора, че програмата му свива всеки файл – в частност, тя прави от всеки файл с големина n друг файл с големина $< n$. Тогава кодомейнът има мощност, по-малка от тази на домейна.

Съгласно принципа на Дирихле, не съществува тотална инективна функция, чийто домейн има по-голяма мощност от кодомейна. □

3 Приложения на биномния коефициент

Задача 8. Колко са булевите вектори с n единици и m нули?

Решение: Да разгледаме тези вектори като характеристични вектори върху множество с $n + m$ елемента. Съществува очевидна биекция между тези вектори, от една страна, и подмножествата с мощност n, от друга. Известно е, че броят на тези подмножества е $\binom{n+m}{n}$, което е същото като $\binom{n+m}{m}$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $\binom{n+m}{n}$. □

Задача 9. В колко булеви вектори с n единици и m нули, след всяка единица следва поне една нула?

Решение: Удобно е да третираме всеки подвектор единица-нула като едно неделимо блокче $\boxed{10}$. Примерно, ако векторът е 10001010010, да си го представим не като последователност от единадесет елемента, а като последователност от седем елемента: четири блока единица-нула и още три нули между тях:

$$\boxed{10}\,00\,\boxed{10}\,\boxed{10}\,0\,\boxed{10}$$

Задачата се свежда до задачата, колко вектори от n елемента от един вид (блокчета единица-нула) и $m - n$ елемента от друг вид ("свободни" нули) има. С цел по-ясно представяне на решението, нека сменим символите и кажем, че новата задача е: колко вектори от p елемента от един вид и q елемента от друг вид има. Но ние знаем отговора – съгласно Задача 8, той е $\binom{p+q}{p}$. Заместваме p с n и q с $m - n$ и получаваме $\binom{n+m-n}{n} = \binom{m}{n}$. Забележете, че отговорът е правилен дори когато $n > m$: тогава биномният коефициент $\binom{m}{n}$ е нула, което е точният отговор. $\square$

Задача 10. Колко булеви вектори с n единици и m нули има нямат съседни единици?

Решение: Задачата прилича на Задача 9, но не е същата. В тази задача отговорът "брои" и вектори, завършващи на единица, примерно 10101, които не биват "броени" от Задача 9. Нека S е множеството от векторите, за които става дума в тази задача. S се разбива на S' и S'', където S' са векторите, завършващи на нула, а S'' са векторите, завършващи на единица. Съгласно принципа на разбиването, $|S| = |S'| + |S''|$. Но ние знаем колко е $|S'|$, защото векторите от S' са точно тези, за които става дума в Задача 9: $|S'| = \binom{m}{n}$.

Да разгледаме S''. Всеки вектор от S' завършва на единица, като вляво от нея има задължително нула (иначе би имало две съседни единици). Тогава съществува очевидна биекция между векторите от S'' и булевите вектори $n - 1$ единици и m нули, в които след всяка единица следва поне една нула. Съгласно Задача 9, последните са $\binom{m}{n-1}$. От принципа на биекцията следва, че $|S''| = \binom{m}{n-1}$.

Отговорът е $|S| = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$, което съгласно добре известно свойство на биномните коефициенти е $\binom{m+1}{n}$. $\square$

Задача 11. n на брой хора стоят в редица. По колко начина можем да изберем k от тях, $k \leq n$, така че да не изберем нито двама души, които са един до друг в редицата?

Решение: Всеки избор на k човека от общо n, които са подредени линейно с фиксирана подредба, отговаря биективно на характеристичен вектор с $n - k$ единици и k нули. Допълнителното условие да не бъдат подбрани съседи се "превежда" така: характеристичният вектор да няма съседни единици. Съгласно Задача 10, отговорът е $\binom{k+1}{n-k}$. Забележете, че този отговор остава верен дори когато $k > n$. Тогава биномният коефициент има долен индекс нула, горен индекс по-голям от нула, и самият той е нула, което точно съответства на факта, че такива избори при $k > n$ са невъзможни. $\square$

Задача 12. Колко булеви вектори с дължина n не съдържат нито 11, нито 00 като подвектори?

Отговор: Ако $n = 0$ има точно един такъв вектор: празният. В противен случай са точно два:

$10101010\ldots0$ и $01010101\ldots1$ при четно n

$10101010\ldots1$ и $01010101\ldots0$ при нечетно n

$\square$

Задача 13. Колко булеви вектори с дължина n не съдържат 11 като подвектор?

Решение: Очевидно е, че ако единиците във вектори са "прекалено много", то подвектори 11 са неизбежни. Максималният брой единици, при който може да няма подвектор 11, е $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, примерно:

$$\begin{aligned} 10101010: &\quad \text{когато } n = 8, \text{ най-много } 4 = \left\lceil \tfrac{8}{2} \right\rceil \text{ единици} \\ 101010101: &\quad \text{когато } n = 9, \text{ най-много } 5 = \left\lceil \tfrac{9}{2} \right\rceil \text{ единици} \end{aligned}$$

Нека p е броят на единиците, а q е броят на нулите. От условието имаме $p + q = n$. Току-що установихме, че $p \in \{0, 1, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$. За всеки конкретни p и q, броят на търсените вектори е $\binom{q+1}{p}$ съгласно Задача 10, тоест $\binom{n-p+1}{p}$. Съгласно принципа на разбиването, отговорът е:

$$\sum_{p=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n-p+1}{p}$$

$\square$

Определение 1. Кръгов вектор *ще наричаме вектор, на който първата и последната позиция (също) се считат за съседни. Ако кръговият вектор е $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в него съседствата са a_1 с a_2, a_2 с a_3, $\ldots$, a_{n-1} с a_n, a_n с a_1. Кръговите вектори* не са *еквивалентни спрямо ротация, тъй като имат номерирани позиции;* 0001 *и* 0010 *са различни кръгови вектори.* $\square$

Задача 14. Колко кръгови булеви вектори с n единици и m нули нямат съседни единици?

Решение: Да разгледаме множеството S от линейните (тоест, "обикновените") вектори с n единици и m нули без съседни единици. От Задача 10 знаем, че $|S| = \binom{m+1}{n}$. Нека $\tilde{S}$ е подмножеството на S от тези вектори, които започват и завършват с единица. Търсеният в тази задача отговор е $|S| - |\tilde{S}|$, тъй като кръговите вектори без съседни единици са точно тези линейни вектори без съседни единици, които освен това нямат единици в най-лявата и най-дясната позиции.

Да разгледаме $\tilde{S}$. Да дефинираме, че $p = n + m$. Очевидно, $p \geq 3$. Ако $p = 3$, то $\tilde{S}$ се състои само от един вектор: 101. Ако $p \geq 4$, то всеки вектор от $\tilde{S}$ е от вида:

$$\underbrace{1\,0\,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{дължина } p-4}\,0\,1}_{\text{дължина } p}$$

Посоченият подвектор с дължина $p - 4$ има $n - 2$ единици, $m - 2$ нули и единственото ограничение е, че няма съседни единици. Следователно, ако $p \geq 4$, то има очевидна биекция между $\tilde{S}$ и множеството на линейните вектори с $n - 2$ единици, $m - 2$ нули и без съседни единици. Съгласно Задача 10, последните имат брой $\binom{m-2+1}{n-2} = \binom{m-1}{n-2}$. Този резултат е в сила дори когато $p = 3$: тогава $n = 2$, $m = 1$ и $\binom{m-1}{n-2} = \binom{0}{0} = 1$.

И така, отговорът на задачата е

$$
\begin{aligned}
|S| - |\tilde{S}| &= \binom{m+1}{n} - \binom{m-1}{n-2} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!\, n!} - \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-2))!\, (n-2)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!\, n!} - \frac{(m-1)!\, n(n-1)}{(m-n+1)!\, n!} \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\, n!} \left((m+1)m - n(n-1)\right) \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\, n!} \left(m^2 + m - n^2 + n\right) \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\, n!} \left((m-n)(m+n) + (m+n)\right) \\
&= \frac{(m-1)!(m+n)}{(m-n+1)!\, n!} (m-n+1) \\
&= \frac{(m-1)!(m+n)}{(m-n)!\, n!} \\
&= \frac{m+n}{m} \times \frac{m!}{(m-n)!\, n!} \\
&= \frac{m+n}{m} \binom{m}{n}
\end{aligned}
$$

□

Задача 15. Рицарите на кръглата маса са 12. Те винаги сядат около масата по един и същи начин. Освен това, между рицарите има вражди: всеки рицар е във вражда с точно тези двама рицари, които са негови съседи около масата. По колко начина може да бъдат подбрани 5 рицаря от 12-те за мисия, ако искаме в избраната група да няма вражди?

Решение: Всяко избиране на 5 от 12 рицаря може да се представи чрез характеристичен вектор от 5 единици и 7 нули. Векторът обаче не е линеен, а кръгов, и не трябва да съдържа съседни единици – това следва от "кръговото враждуване" на рицарите около масата и изискването да не бъдат избрани враждуващи рицари.

Задачата е същата като задачата, колко кръгови вектора с 5 единици и 7 нули не съдържат съседни единици. Съгласно Задача 14, отговорът е $\frac{7+5}{7}\binom{7}{5} = 36$. □

4 Принцип на включването и изключването

Задача 16. В група от студенти всеки владее поне един език от анлийски, френски и немски. Нека A_E е подмножеството на студентите, владеещи английски, A_F е подмножеството на студентите, владеещи френски , а A_G е подмножеството на студентите, владеещи немски. Нека A_{EF} е подмножеството на студентите, владеещи английски и френски, A_{EG} е подмножеството на студентите, владеещи английски и немски, а A_{FG} е подмножеството на студентите, владеещи френски и немски. Нека A_{EFG} е подмножеството на студентите, владеещи английски, френски и немски. Дадено е, че

$$\begin{aligned}
|A_E| &= 19\\
|A_F| &= 25\\
|A_G| &= 21\\
|A_{EF}| &= 13\\
|A_{EG}| &= 7\\
|A_{FG}| &= 9\\
|A_{EFG}| &= 3
\end{aligned}$$

От колко студента се състои групата?

Решение: Нека A е множеството от всички студенти в тази група. Тъй като $A = A_E \cup A_F \cup A_G$, може да смятаме, че A е универсумът и $\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A = \emptyset$. От принципа на включване и изключване знаем, че

$$\left|\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A\right| = |A| - (|A_E| + |A_F| + |A_G|) + (|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}|) - |A_{EFG}|$$

тоест

$$0 = |A| - (19 + 25 + 21) + (13 + 7 + 9) - 3$$

откъдето

$$|A| = 39$$

□

Задача 17. При условията на Задача 16,

- колко студента знаят точно два езика?
- колко студента знаят английски, но не знаят нито френски, нито немски?

Решение: Отговорът на първия въпрос е

$$|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}| - 3|A_{EFG}| = 13 + 7 + 9 - 3 \times 3 = 20$$

Отговорът на втория въпрос е

$$|A_E| - (|A_{EF}| + |A_{EG}|) + |A_{EFG}| = 19 - (13 + 7) + 3 = 2$$

□

Задача 18. Дадена е група от 100 студента. Известно е, че 37 студента учат английски, 35 студента учат френски, 33 студента учат немски, 38 студента учат испански, 16 студента учат английски и френски, 8 учат английски и немски, 18 учат английски и испански, 13 учат френски и немски, 9 учат френски и испански, 13 учат немски и испански, 5 студента учат английски, френски и немски, 6 студента учат английски, немски и испански, 5 студента учат френски, немски и испански, а 3 студента учат английски, немски, френски и испански. Колко студента учат английски, френски и испански, ако 14 студента не изучават никакви езици?

Решение: Нека търсеният брой е x. По принципа на включването и изключването имаме:

$$\begin{aligned}14 = 100 &\\ &- (37+35+33+38)\\ &+ (16+8+18+13+9+13)\\ &- (5+6+5+x)\\ &+ 3\end{aligned}$$

тоест

$$14 = 21 - x \leftrightarrow x = 7$$

□

Задача 19. Колко са тоталните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Съгласно принципа на умножението, отговорът е n^m. □

Задача 20. Колко са частичните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Нека множеството от тези функции е $\mathcal{F}$. Нека z е елемент, който не се съдържа в Y. Нека $Z = Y \cup \{z\}$. Нека $\mathcal{F}_Z$ е множеството от тоталните функции $f : X \to Z$. Тривиално е да се покаже, че съществува биекция между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_Z$ – за всяка функция от $f \in \mathcal{F}$, която е тотална, съществува точно една функция от $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = f(a)$$

а за всяка функция $f \in \mathcal{F}$, която е не е тотална, съществува точно една функция $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = \begin{cases} f(a), & \text{ако } f(a) \text{ е дефинирано} \\ z, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Съгласно предната задача, $|\mathcal{F}_Z| = (n+1)^m$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $|\mathcal{F}_Z| = (n+1)^m$. □

В следващите задачи, под “функция” разбираме “тотална функция”.

Задача 21. Колко са сюрективните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Да въведем следните означения. Нека N е броят на всички функции. От Задача 19 знаем, че $N = n^m$. Ако от този брой извадим броя на не-сюрективните функции, ще получим броя на сюрекциите. Това ще направим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване. За всеки елемент $a \in Y$, нека N_a е броят на функциите, които “не покриват” a, тоест тези, при които a не е образ на нито един елемент от X. Това не значи, че всички останали елементи от Y са покрити, а че със сигурност a не е покрит – за останалите елементи от Y не се казва нищо. Очевидно $N_a = (n-1)^m$, защото това е броят на функциите с домейн X и кодомейн $Y \setminus \{a\}$, за всяко $a \in Y$. Тъй като a взема n стойности, имаме сумата от всички N_a е $n.(n-1)^m$. Но разликата

$$n^m - n(n-1)^m \tag{14}$$

не е правилният отговор (освен ако m не е 1), тъй N_{a_1} и N_{a_2} за различни $a_1 \in Y$, $a_2 \in Y$ не броят функции, които са непременно различни – всяка функция, която не покрива нито a_1, нито a_2, ще бъде преброена като единица веднъж от N_{a_1} и веднъж от N_{a_2}. Иначе казано, (14) е по-малко от верния отговор – извадили сме прекалено много.

Нека $N_{a,b}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b \in Y$, $a \neq b$. Както и преди, може да има и други непокрити елементи от Y; със сигурност поне a и b не са покрити. $N_{a,b} = (n-2)^m$, тъй като това е броят на функциите от X в $Y \setminus \{a, b\}$. Сумата от всички такива $N_{a,b}$, по всички двуелементни подмножества $\{a, b\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{2}(n-2)^m$. Но

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m = (-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m \tag{15}$$

все още не е верният отговор (освен ако m не е 2), макар че е по-близо от (14). (15) е повече от верния отговор, тъй като с $+\binom{n}{2}(n-2)^m$ сме добавили повече, отколкото трябва, към (14).

Аналогично, $N_{a,b,c}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b, c \in Y$, $a \neq b \neq c \neq a$. $N_{a,b,c} = (n-3)^m$ и сумата от всички такива $N_{a,b,c}$, по всички триелементни подмножества $\{a, b, c\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{3}(n-3)^m$. Ако m е достатъчно голямо, то

$$(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + (-1)^3\binom{n}{3}(n-3)^m \tag{16}$$

все още не е верният отговор, макар че е още по-близо.

Съгласно принципа на включването и изключването, верният отговор е

$$\begin{aligned}&(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + \\ &(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))^m + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m\end{aligned} \tag{17}$$

Последното събираемо е нула, което съответства на факта, че има нула функции, които не покриват нито един елемент. Накракто, верният отговор е

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

□

Задача 22. Колко стринга с дължина n има над латинската абзука $\{a, b, \ldots, z\}$, такива че всеки символ се среща поне веднъж?

Упътване: Разгледайте стринговете без ограничения като функции от множеството на позициите към множеството от символите (а **не** обратното!). Ограничението за вида на стринговете налага ограничение върху вида на функциите – какви трябва да са те?

Задача 23. Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които нито един елемент не си е на мястото? Числото i си е на мястото, ако се намира на i-та позиция, примерно в пермутацията 2 1 3 5 6 4, числото 3 си е на мястото и никое друго число не си е на мястото.

Решение: Броят на пермутациите без ограничения е $n!$. Ще извадим от $n!$ броят на пермутациите, в които някакви елементи са си на мястото. Това ще правим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване.

Пермутациите, в които даден елемент е на мястото си и няма други ограничения, са $(n-1)!$ на брой. За всеки друг фиксиран елемент, аналогично, има $(n-1)!$ пермутации, в които той си е на мястото и няма други ограничения. Тъй като има n елемента, от които да фиксираме елемент на позиция, и за всеки елемент имаме $(n-1)!$ пермутации, сумата от последните е $n.(n-1)!$. Естествено, $n(n-1)! = n!$ не е правилният отговор за броя на пермутациите, в които поне един елемент си е на мястото, тъй като брои някои пермутации повече от един път. С други думи, разликата

$$n! - n(n-1)!$$

е по-малка от верния отговор (освен ако n не е 1: наистина, при $n = 1$ отговорът е 0). Съгласно принципа на включване и изключване добавяме броя на пермутациите, в които два елемента са си на местата и няма други ограничения. Тези два елемента можем да изберем по $\binom{n}{2}$ начина, за всеки избор имаме $(n-2)!$ пермутации. Но сумата

$$n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)!$$

е по-голяма от верния отговор (освен ако n не е 2), така че продължаваме аналогично, по принципа на включването и изключването:

$$\begin{aligned}
&n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}n(n-(n-1))! + (-1)^n(n-n)! = \\
&(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)! + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)! + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)! + \ldots \\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))! + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! = \\
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!
\end{aligned}$$

Това е верният отговор. □

Задача 24. Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които точно m елемента са си е на мястото за някое m, такова че $0 \leq m \leq n$, ако

- тези m елемента са фиксирани,
- тези m елемента не са фиксирани.

Задача 25. Измежду 100 студента:

- 72 посещават практикум по C,
- 60 посещават практикум по Java.

Докажете, че поне 32 от тези студенти посещават и двата практикума.

Решение: Нека A и B са множествата от студентите, посещаващи съответно практикумите по C и Java. Нека $U = A \cup B$. Прилагайки принципа на включване и изключване спрямо този универсум, извеждаме

$$\underbrace{0}_{\text{няма елементи в допълнението}} = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

Оттук

$$|A \cap B| = \underbrace{|A|}_{72} + \underbrace{|B|}_{60} - |U| = 132 - |U|$$

Тъй като $|U| \leq 100$, то $|A \cap B| \geq 32$.

Задача 26. По колко начина може да се оцветят квадратчетата на правоъгълна мрежа $m \times n$ (m реда и n колони) в k цвята

а) без ограничения;

б) с единственото ограничение, че във всеки ред няма съседни квадратчета с еднакъв цвят;

в) с единственото ограничение, че във всеки ред е използван всеки от цветовете.

Решение:

а) k^{mn}, понеже всяко оцветяване е функция от множеството на квадратчетата в множеството от цветовете. Има общо mn квадратчетаи k цвята. Прилагаме формулата за броя на функциите без ограничения (**Зад. 8**).

б) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако N е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът N^m по принципа на умножението.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Да разгледаме кое да е квадратче в ред i, примерно квадратче $(i, 1)$. За него имаме k възможности за оцветяване заради наличието на k възможни цвята. За съседното му квадратче $(i, 2)$ имаме $k - 1$ възможности поради ограничението да не се използват еднакви цветове на съседни квадратчета. Аналогично, за квадратчета $(i, 3)$, $(i, 4)$, $\ldots$, (i, n) имаме $k-1$ възможности. Като цяло, за ред i възможните различни оцветявания са $k(k-1)^{n-1}$. Следователно, $N = k(k-1)^{n-1}$ и отговорът е $k^m(k-1)^{m(n-1)}$.

в) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако $N(k, n)$ е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът $(N(k, n))^m$ по принципа на умножението. $N(k, n)$ може да се получи веднага от формулата за броя на сюрекциите, но тук ще го изведем от основните принципи.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Нека U е множеството на всички възможни оцветявания на ред i с k цвята без ограничения. $|U| = k^n$. Нека S_j е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цвят j не се използва, за всички j, такива че $1 \leq j \leq k$[†]. Нека S_{j_1, j_2} е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цветове j_1 и j_2 не се използват, за всички j_1 и j_2, такива че $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$. Да направим следната дефиниция, която се явява обобщение на предните две за произволен брой цветове.

[†]Може да има и други цветове, които не се използват. Цвят j не се използва *със сигурност*.

Определение 1. За всички цели положителни $j_1, j_2, \ldots, j_t$, такива че $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_t \le k$, множеството от възможните оцветявания на ред i, в които цветове j_1, j_2, $\ldots$, j_t не се използват†, е $S_{j_1, j_2, \ldots, j_t}$. □

По принципа на включването и изключването,

$$
\begin{aligned}
N(k,n) = |U| \\
&- \underbrace{\sum_{1 \le j_1 \le k} |S_{j_1}|}_{\text{поне един цвят не се използва}} \\
&+ \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2}|}_{\text{поне два цвята не се използват}} \\
&- \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap S_{j_3}|}_{\text{поне три цвята не се използват}} \\
&\ldots \\
&+ (-1)^t \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_t \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_t}|}_{\text{поне } t \text{ цвята не се използват}} \\
&\ldots \\
&+ (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_{k-1}}|}_{\text{поне } k-1 \text{ цвята не се използват, тоест използва се само } 1 \text{ цвят}} \\
&+ (-1)^k \underbrace{|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_k}|}_{k \text{ цвята не се използват, тоест няма оцветяване изобщо; това трябва да е } 0.}
\end{aligned}
$$

Твърдим, че за всяко t, такова че $1 \le t \le k$,

$$
|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_t}| = \binom{k}{t}(k-t)^n \tag{18}
$$

Това е така, защото за да определим начините да се оцвети ред i, така че t цвята да не се ползват, е достатъчно да намерим броя на начините да се подберат t цвята от k—този брой е $\binom{k}{t}$—и броят начини да се оцвети реда с останалите $k-t$ цвята—този брой е $(k-t)^n$. Израз (18) следва веднага по принципа на умножението.

Тогава

$$
\begin{aligned}
N(k,n) &= k^n - \sum_{t=1}^{k} (-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n \\
&= \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n, \text{ тъй като } (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n = 0
\end{aligned}
$$

Задача 27. По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

† Може да има и други цветове, които не се използват. Цветове $j_1, j_2, \ldots, j_t$ не се използва *със сигурност*.

Решение: Нека двойките са c_1, c_2, …, c_n. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, където $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпружески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| \\ &- \sum_{1 \le i \le n} |S_i| \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| \\ &- \ldots \\ &+ (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|\end{aligned}$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различими (номерирани) места без никакви ограничения.
Ще покажем, че всяка от сумите

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_t \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}|$$

където t е някое цяло число, такова че $1 \le t \le n$, е равна на

$$\binom{n}{t}.2n.(2n - t - 1)!.2^t$$

Тази сума е равна на броя начини t двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани t двойки от $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Имаме следните четири независими съображения.

- По $\binom{n}{t}$ начина можем да подберем t двойки от общо n.
- По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези t двойки.
- За останалите $t-1$ двойки, по $(2n-t-1)!$ начина можем да разположим хората от тези $t-1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседи, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните t двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $t-1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен обект. Общо обектите са на брой

$$\underbrace{2n-2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}} - \underbrace{2(t-1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } t-1 \text{ двойки}} + \underbrace{t-1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n - t - 1$$

Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $t-1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойка) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n - t - 1$ обекта в редица.

- За всяка от досега направените подборки на места за сядане на t двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^t възможни начина.

След като установихме, че

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_t \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}| = \binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t$$

отговорът следва да е

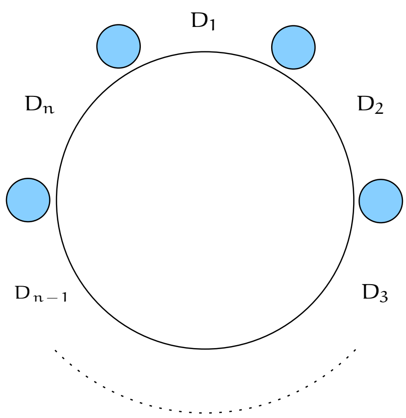
$$\begin{aligned} |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t \\ &= \sum_{t=0}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t \\ &= 2n\left(\sum_{t=0}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.(2n-t-1)!.2^t\right) \end{aligned}$$

□

Задача 28. По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове и освен това около масата да се редуват жени и мъже, така че да няма нито двама мъже един до друг, нито две жени една до друга?

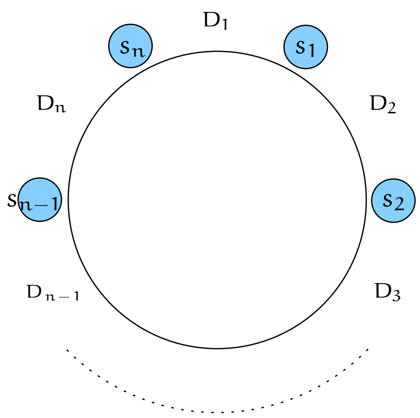
Решение: Нека столовете около масата са номерирани с $1, 2, \ldots, 2n$. Нека първо седнат дамите. Очевидно, те могат да седнат или само на четните, или само на нечетните номера. На четните номера те могат да седнат по $n!$ начина. На нечетните, също $n!$ начина. Общо има $2n!$[†] начина, по които могат да седнат дамите, като дотук не сме нарушили с нищо ограниченията на тази задача, следователно всеки от тези $2n!$ начина е възможно начало на процеса на сядане. За всеки от тези $2n!$ начина, мъжете могат да седнат на свободните столове—спазвайки ограниченията на задачата—по един и същи брой начини. Да наречем този брой $g(n)$. Отговорът е $2n!g(n)$ и сега търсим $g(n)$.

Нека дамите са $D_1, D_2, \ldots, D_n$, а мъжете са $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Без ограничение на общността, нека дамите са седнали така (кръговете означават незаетите столове):



Нека преномерираме местата, които са останали свободни с $s_1, s_2, \ldots, s_n$ така:

[†] $2n!$ е $2 \times (n!)$, а не $(2n)!$.



Нека S означава множеството от всички възможни, $n!$ на брой, начина да седнат мъжете. Някои от тях са разрешени, други са забранени. Всяко сядане от S може да има или да няма всяко от следните свойства:

P_1: H_1 е на s_1.

P_2: H_2 е на s_2.

...

P_n: H_n е на s_n.

Q_1: H_1 е на s_n.

Q_2: H_2 е на s_1.

Q_3: H_3 е на s_2.

...

Q_n: H_n е на s_{n-1}.

Да означим множеството $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ с $\mathfrak{P}$. Това са "вредните" свойства по отношение на нашата задача, те са свързани със забранените сядания. Очевидно $g(n) = |\tilde{S}|$, където

$$\tilde{S} = \{x \in S \mid \text{ нито едно свойство от } \mathfrak{P} \text{ не е в сила за } x\}$$

Забележете, че не всяка комбинация от тези свойства е възможна, примерно няма как едно сядане да има P_1 и Q_2, защото $P_1 \wedge Q_2$ означава, че на s_1 седят едновременно двама души (H_1 и H_2). Също така няма как едно сядане да има $P_1 \wedge P_n$, защото това би означавало, че H_1 седи едновременно на s_1 и s_n. Свойства, които е възможно да бъдат едновременно изпълнени, ще наричаме *съвместими*.

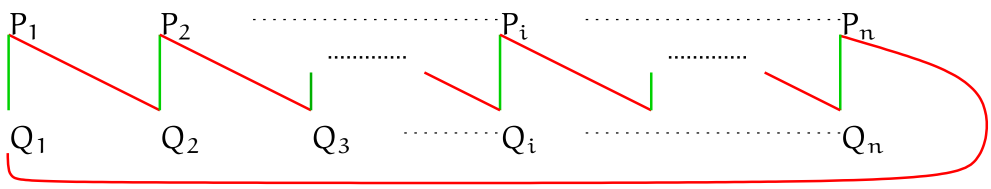
> *Преди да продължим с решението, едно пояснение. Нашата цел е да намерим броят на начините* k *мъже да седнат на забранени за тях места, и после да приложим принципа на включването и изключването. Естествено, тук се има предвид* поне k *мъже да са седнали на забранени за тях места – може да има и други мъже на забранени места, но със сигурност* k *са на забранени места. Намерим ли този брой, довършването на решението е нещо лесно.*

В тази задача забранените конфигурации—а именно сядането на k мъже на забранени места—са по-трудни за преброяване в сравнение, примерно, със забранените конфигурации за k числа в Задача 23. В Задача 23 беше лесно: за всяко число имаше едно *забранено място, така че по $\binom{n}{k}$ начина избираме k числа, които да сложим на забранени места, останалите числа можем да сложим по общо $(n-k)!$ начина, и събираемото в крайния отговор, което съответства на k забранени слагания, е $(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$. В тази задача обаче за всеки мъж има две забранени места, откъдето идват усложненията: първо, той не може да ги ползва едновременно, и второ, за всяко място има двама мъже, а не един мъж, за които то е забранено. Въвеждането на гореспоменатите $2n$ свойства ни дава възможност да броим систематично броят на забраните сядания на k мъже.*

Както вече казахме, търсим броя на сяданията на мъжете, които нямат нито едно свойство от $\mathfrak{P}$. Ще го намерим съгласно принципа на включването и изключването, но приложен по отношение на елементите на $\mathfrak{P}$. Нека r_k е броят начини да подберем k *съвместими* свойства от $\mathfrak{P}$. Очевидно r_k е броят на начините k мъже да седнат на забранени места. Тогава

$$g(n) = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^n r_n(n-n)!$$

Решаването на задачата се свежда до намирането на r_k като функция на k и n. Очевидно $r_1 = 2n$, защото когато става дума за едно свойство, несъвместимост няма, така че $r_1 = |\mathfrak{P}| = 2n$. Колко е r_2? Първо да съобразим, че несъвместими двойки свойства от $\mathfrak{P}$ са Q_1 и P_1, P_1 и Q_2, Q_2 и P_2, P_2 и Q_3, $\ldots$, P_{n-1} и Q_n, Q_n и P_n, P_n и Q_1. Това са общо $2n$ (ненаредени) двойки. Да нарисуваме следната диаграма на елементите на $\mathfrak{P}$ заедно с несъвместимостите между тях:



Червените линии отразяват факта, че на един стол не може да седне повече от един мъж. Зелените линии отразяват факта, че един мъж не може да седне на повече от един стол. Забележете, че това е кръгов вектор с $2n$ елемента. Да питаме колко е r_2 е същото като да питаме по колко начина можем да изберем два несъседни елемента от този кръгов вектор. Отговорът очевидно е $2n(2n-3)$, тъй като за първия избран имаме $2n$ възможности, а за втория, само $2n-3$.

Да разгледаме r_k. Да питаме колко е r_k е същото като да питаме по колко начина можем да изберем k елемента от този кръгов вектор, нито два от които не са съседи. На свой ред това е същото като да питаме, колко кръгови булеви вектора с дължина $2n$ имат k единици и $2n-k$ нули и нямат съседни единици. Съгласно Задача 10, отговорът е $\frac{2n-k+k}{2n-k}\binom{2n-k}{k} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$. Следователно,

$$r_k = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

При $k=2$ този израз става $\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2} = \frac{2n}{2n-2} \times \frac{(2n-2)(2n-3)}{2\times 1} = 2n(2n-3)$, което съвпада с вече изведеното за r_2. И така,

$$g(n) = n! - \frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)! + \frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \frac{2n}{2n-n}\binom{2n-n}{n}(n-n)!$$

тоест

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

и отговорът на задачата е

$$2\,n! \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \right)$$

$\square$

Задача 29. Колко стринга има над азбуката $\{0, 1, 2\}$, в които има точно две букви от всеки вид и няма съседни еднакви символи?

Решение: Без последното ограничение, броят на стринговете съгласно правилото за броя на пермутации с повторения е

$$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$$

Нека универсумът U да е това множество – стринговете с точно две a-та, две b-та и две c-та. Нека дефинираме следните подмножества на U.

- N_1 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2,
- N_2 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3,
- N_3 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4,
- N_4 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 4 и 5,
- N_5 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4,
- $N_{1,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{1,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{2,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{2,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6.

Съгласно принципа на включване и изключване, търсеният отговор е

$$N = |U| - (N_1 + N_2 + \ldots + N_5) + (N_{1,3} + N_{1,4} + \ldots + N_{3,5}) - N_{1,3,5}$$

Забелязваме, че $N_1 = 3 \times \binom{4}{2}$, тъй като има три възможности за символа на първа и втора позиция, а на останалите четири позиции слагаме два символа от друг вид и два от трети вид. Тогава $N_1 = 18$. Забелязваме, че $N_1 = N_2 = \ldots = N_5$.

Освен това, $N_{1,3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$, защото имаме три възможности за символа на първа и втора позиция, оттук две възможности за символа на трета и четвърта позиция, и само една възможност спрямо досега направените избори за символа на останалите (пета и шеста) позиции. Също така, $N_{1,3} = N_{1,4} = \ldots = N_{3,5}$.

Накрая, $N_{1,3,5} = 6$ с аналогични съображения. Имаме

$$N = 90 - (5 \times 18) + (6 \times 6) - 6 = 30$$

□

Задача 30. Колко различни наредени петорки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ от естествени числа удовлетворяват

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

Решение: Става дума за комбинаторни конфикурации без наредба, с повторение, с големина 100 над опорно множество с 5 елемента: можем да мислим за тази сума като за сто символа, всеки от които е един от $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, като всеки един символ има принос единица. Съгласно изведения на лекции резултат за броя на тези комбинаторни конфигурации, отговорът е

$$K_{\Pi}(5, 100) = \binom{100 + 5 - 1}{5 - 1} = 4\,598\,126$$

Алтернативно обяснение, може би по-ясно и нагледно, е чрез "топки и кутии". Задачата е същата като задачата, по колко различни начина могат да се поставят 100 неразличими топки (това са стоте единици, чийто сбор е сумата 100) в пет различни кутии (това са хиксовете). □

Задача 31. Колко различни наредени петорки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ от естествени числа удовлетворяват

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\
&0 \leq x_1 \leq 30 \\
&0 \leq x_2 \leq 30 \\
&0 \leq x_3 \leq 30 \\
&0 \leq x_4 \leq 30 \\
&0 \leq x_5 \leq 30
\end{aligned}$$

Решение: Задачата е подобна на Задача 30, но сега кутиите имат "капацитети": най-много 30 топки в кутия. Нека B_i е множеството от конфигурациите-решения от Задача 30, в които кутия i е "нарушител"—тоест в нея има поне 31 топки—за $1 \leq i \leq 5$. Търсим броя на конфигурациите, в които нарушения няма за нито една кутия. С други думи, търсим

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}|$$

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}| = |U| - \sum_{1 \le i \le 5} |B_i| + \sum_{1 \le i < j \le 5} |B_i \cap B_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le 5} |B_i \cap B_j \cap B_k| + \underbrace{\sum_{1 \le i < j < k < t \le 5} |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_t|}_{\text{това е } 0} - \underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5|}_{\text{това е } 0}$$

където U е универсумът $K_{\Pi}(5, 100)$. Както показахме в Задача 30, $|U| = 4\,598\,126$. Ясно е защо последните две събираеми са нули: няма как при обща сума 100, четири или пет променливи да са поне 31. Следователно, търсеният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}| = 4\,598\,126 - \sum_{1 \le i \le 5} |B_i| + \sum_{1 \le i < j \le 5} |B_i \cap B_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le 5} |B_i \cap B_j \cap B_k| \quad (19)$$

От общи съображения е ясно, че $|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = |B_5|$ и $\underbrace{|B_1 \cap B_2| = \ldots = |B_4 \cap B_5|}_{10 \text{ такива}}$ и $\underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = \ldots = |B_3 \cap B_4 \cap B_5|}_{10 \text{ такива}}$. Търсеният отговор е:

$$4\,598\,126 - 5 \times |B_1| + 10 \times |B_1 \cap B_2| - 10 \times |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \quad (20)$$

Колко е $|B_1|$? Щом x_1 е сигурен нарушител на капацитета (и няма друг сигурен нарушител), то е вярно, че

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ &31 \le x_1 \\ &0 \le x_2 \\ &0 \le x_3 \\ &0 \le x_4 \\ &0 \le x_5 \end{aligned}$$

Да представим x_1 като $x_1 = x_1' + 31$. Тогава условието $31 \le x_1$ е същото като $0 \le x_1'$, а $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ става $x_1' + 31 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$, тоест $x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 69$. Изведохме, че $|B_1|$ е мощността на множеството от наредените петорки $(x_1', x_2, x_3, x_4, x_5)$, които удовлетворяват:

$$\begin{aligned} &x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 69 \\ &0 \le x_1' \\ &0 \le x_2 \\ &0 \le x_3 \\ &0 \le x_4 \\ &0 \le x_5 \end{aligned}$$

Но ние знаем колко такива наредени петорки има: $|K_{\Pi}(5, 69)| = 1\,088\,430$.

Напълно аналогично, $|B_1 \cap B_2| = |K_{\Pi}(5, 38)| = 111\,930$ и $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = |K_{\Pi}(5, 7)| = 330$. Заместваме в (20) и получаваме крайния отговор

$$4\,598\,126 - 5 \times 1\,088\,430 + 10 \times 111\,930 - 10 \times 330 = 271\,976$$

□

5 Доказателства с комбинаторни разсъждения

Задача 32. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Решение: Нека A е множество с $2n$ елемента. Нека всеки елемент от A има атрибут-цвят, като n елемента са бели, а останалите n, черни. По колко начина можем да подберем различни подмножества на A с по n елемента?

От една страна, това може да стане по

$$\binom{2n}{n} \tag{21}$$

начина, тъй като това са комбинаторни конфигурации без повторение и без наредба – тук не обръщаме внимание на цветовете на подбраните елементи.

От друга страна, можем да разбием подбиранията по броя на елементите от единия цвят, да речем белия. Белите елементи, които попадат в дадено подбиране, може да са 0 или 1 или ... или n. Следователно, да подберем n елемента от общо $2n$ в тази задача е същото като да подберем k елемента измежду всичките n бели и да подберем $n-k$ елемента измежду всичките n черни. За дадено k, такова че $0 \leq k \leq n$, броят начини да подберем n елемента от общо $2n$, така че k измежду подбраните да са бели, е, по принципа на произведението:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{броят начини } k \text{ елемента от общо } n \text{ да са бели}} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{броят начини останалите елементи да са черни}}$$

Тъй като k се мени от 0 до n и подбиранията се разбиват по k (при различен брой бели елементи в две подбирания, те задължително са различни), общият брой подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Но знаем, че $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, следователно общият брой на подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{22}$$

Изразите (21) и (22) броят едно и също количество, следователно са равни. □

Задача 33. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)!$$

Решение: Лявата страна брои всички пермутации на n елемента, да кажем $\{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно това множество може да бъде разбито на $n+1$ непразни подмножества по това, точно колко елемента са си на мястото: 0 или 1 или 2 или ... или n. Дясната страна брои същото множество пермутации, но по-детайлно, съгласно споменатото разбиване: има $\binom{n}{m}$ начина да изберем точно кои елементи да са си на местата, за оставащите $n-m$ позиции ползваме вече изведената формула за броя на пермутациите, при които нито един елемент не си е на мястото. □

Задача 34. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

Решение: Вече доказахме, че броят на сюрекциите от m в n елементно множество е $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$. При $m = n$ получаваме израза от дясната страна. Но ако $n = m$, то тези сюрекции всъщност са биекциите между двете множества. А броят на биекциите е $n!$, което е лявата страна. $\square$

Задача 35. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

Решение: 2^n е броят на всички булеви вектори с дължина n. Очевидно $n2^n$ е общият брой на елементите във всички булеви вектори с дължина n. От тези $n2^n$ елементи, половината са нули, а другата половина, единици. Този факт се извежда тривиално от най-общи съображения: ако инвертираме побитово всички вектори, получаваме същото множество, като броят на единиците в началното е равен на броя на нулите в полученото, но понеже полученото е същото като началното, броят на единиците е равен на броя на нулите в него.

Щом половината от $n2^n$ елемента са единици, то единиците са точно $\frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}$. Това е лявата страна на тъждеството, което доказваме. Дясната страна очевидно също брои единиците във всички булеви вектори с дължина n, но го прави по-подробно: $k\binom{n}{k}$ е точно бройката на единиците в подмножеството вектори, имащи точно k единици. $\square$