Примерно решение на домашно №1 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Зад. 1 Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Можете да ползвате наготово изучаваните в час свойства на операциите върху множества.

Решение: База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\overline{\bigcap_{i=1}^{1} A_i} = \bigcup_{i=1}^{1} \overline{A_i}$, което е същото като $\overline{A_1} = \overline{A_1}$, което е тривиално вярно. Инд. предположение: твърдението е вярно за произволна стойност $n \geq 1$ на аргумента. Инд. стъпка: да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е:

$$
\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i} &= && \text{(от асоциативността на сечението)}\\
\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}} &= && \text{(от закона на Де Морган)}\\
\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} \bigcup \overline{A_{n+1}} &= && \text{(от инд. предположение)}\\
\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \bigcup \overline{A_{n+1}} &= && \text{(от асоциативността на обединението)}\\
\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{A_i} & &&
\end{aligned}
$$

□

Зад. 2 Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Решение: База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{1}$, което е същото като $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$, което е тривиално вярно. Инд. предположение: твърдението е вярно за произволна стойност $n \geq 1$ на аргумента. Инд. стъпка: да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Следната последователност от неравенства и равенства е в сила:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= && \text{(от асоциативността на събирането)}\\
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq && \text{(от инд. предположение)}\\
\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= &&\\
\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= &&\\
\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} &\geq &&\\
\frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} &= &&\\
\frac{n+1}{\sqrt{n+1}} &= &&\\
\sqrt{n+1} & &&
\end{aligned}
$$

Следователно, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$. $\square$

Зад. 3 Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$, където нотацията H_n означава $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Решение: База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} H_k = (1+1)H_1 - 1$, което е същото като $H_1 = 2H_1 - 1$, което е същото като $\frac{1}{1} = 2 \times \frac{1}{1} - 1$, което е тривиално вярно. Инд. предположение: твърдението е вярно за произволна стойност $n \geq 1$ на аргумента. Инд. стъпка: да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е $\sum_{k=1}^{n+1} H_k$. Следната последователност от равенства е в сила:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} H_k &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
\left(\sum_{k=1}^{n} H_k\right) + H_{n+1} &= && \text{(от инд. предположение)}\\
(n+1)H_n - n + H_{n+1} &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
(n+1)H_n - n + H_{n+1} + (n+1)H_{n+1} - (n+1)H_{n+1} &= &&\\
(n+1)H_n - n - (n+1)H_{n+1} + (n+2)H_{n+1} &= &&\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(H_n - H_{n+1}\right) - n &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(H_n - H_n - \frac{1}{n+1}\right) - n &= &&\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(-\frac{1}{n+1}\right) - n &= &&\\
(n+2)H_{n+1} - 1 - n &= &&\\
(n+2)H_{n+1} - (n+1) & &&
\end{aligned}
$$

Следователно, $\sum_{k=1}^{n+1} H_k = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$. $\square$

Зад. 4 Докажете, че множеството

$$A = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

е изброимо безкрайно. Приемат се **само** подробни доказателства, следващи стриктно определението за изброимо безкрайно множество. $\mathbb{N}$ означава множеството от естествените числа $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Решение: Да разгледаме следната функция $f : A \to \mathbb{N}$, където входът a е прозволен елемент на A:

```
f(a) {
  k = 0;
  while (k*(k+1)/2 < a) {
   k ++; }
  return k; }
```

Това е програмен код (близък до `C`), а тази програмна функция `f` е реализация на математическата функция f[†]. Очевидно е, че за всяко число a от A, `f(a)` връща именно това число n, за което $\frac{1}{2}n(n+1)$

[†] Тези две неща: математическата функция и някаква нейна реализация чрез конкретна програма, не са едно и също нещо. Разликата е аналогична на разликата между число и конкретен запис на това число в конкретна бройна система.

е равно на a.
Фактът, че f връща естествени числа и само естествени числа, е очевиден, така че кодомейнът действително е $\mathbb{N}$. Също така е очевидно, че функцията е тотална, понеже няма ограничение за това, кое число от A ще бъде подадено на входа ѝ. Ще покажем, че f е биекция. По дефиниция, една функция е биекция тогава и само тогава, когато е инекция и сюрекция. И така, доказателството, че функцията е биекция, се състои от две части: доказателство, че е инекция, и доказателство, че е сюрекция.
Доказателство, че f е инекция. Да разгледаме $f(a)$ и $f(b)$ за произволни различни елементи $a, b \in A$. Щом те са различни, единият е по-голям от другия. Щом са елементи на A, то те са числа от вида $\frac{1}{2}k(k+1)$ за естествено k. Нека $a = \frac{1}{2}k_a(k_a+1)$ и $b = \frac{1}{2}k_b(k_b+1)$. Без ограничение на общността, нека $a < b$. Тогава очевидно $k_a < k_b$. Очевидно програмната функция f с вход a ще върне k_a и с вход b ще върне k_b. Както отбелязахме, $k_a \neq k_b$. Това доказва, че функцията е инекция: за различни стойности от домейна, образите от кодомейна са различни.
Ще покажем, че f е сюрекция. Това означава, че всяко естествено число n е образ на някой елемен на A. Наистина, нека да разгледаме произволен $n \in \mathbb{N}$. Нека a е числото $\frac{1}{2}n(n+1)$. Тогава, съгласно вече направеното наблюдение, функцията f с вход a ще върне именно n.
И така, функцията е инекция и сюрекция, следователно е биекция. Щом има биекция между A и естествените числа, по дефиниция A е изброимо безкрайно.

Зад. 5 Докажете или опровергайте, че операцията "разлика на множества" е асоциативна. Докажете или опровергайте, че операцията "сечение на множества" е дистрибутивна спрямо операцията "симетрична разлика на множества". Приемат се само отговори, използващи табличния метод.

Решение: Първото твърдение не е вярно, тъй като шестата и седмата колона на таблицата не са равни:

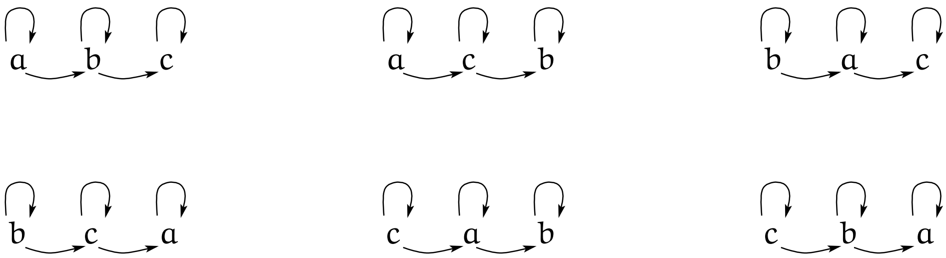
A	B	C	$A \setminus B$	$B \setminus C$	$(A \setminus B) \setminus C$	$A \setminus (B \setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Второто твърдение е вярно, тъй като петата и осмата колона на таблицата са равни:

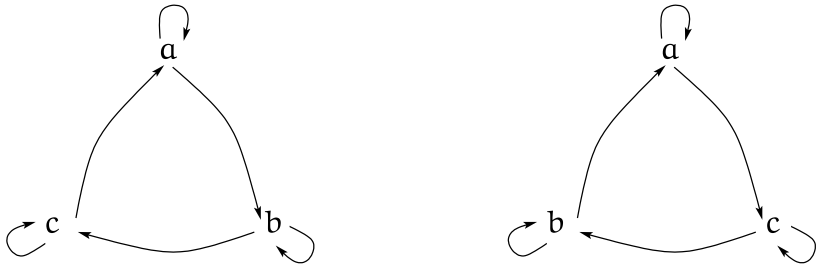
A	B	C	$B \triangle C$	$A \cap (B \triangle C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \triangle (B \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Зад. 6 Нека $S = \{a, b, c\}$. Напишете *в явен вид* всички релации $R \subseteq S \times S$, които са рефлексивни и антисиметрични и *не са* транзитивни. Приемат се само отговори, в които релациите са описани чрез булеви матрици.

Решение: Има и по-кратък начин за конструиране на решение, макар да не е толкова систематичен, отколкото предложеният в упътването. Първо съобразяваме, че следните шест релации, за момента описани чрез графи, са рефлексивни и антисиметрични, но не са транзитивни:



Че не са транзитивни, следва директно от дефиницията на транзитивност. Примерно, в първата посочена релация, би трябвало да има и стрелка от a до c.
Това обаче не са всички нетранзитивни, рефлексивни и антисиметрични, релации. Има още две:



Примерно, в първата от тях, щом a е в релация с b и b е в релация с c, би трябвало a да е в релация с c; също така би трябвало b да е в релация с a и c да е в релация с b.

Същите осем релации, написани с матрици (в същия ред, в който вече ги написахме с графи), са:

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c			1

	a	b	c
a	1		1
b		1	
c		1	1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c			1

	a	b	c
a	1		
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	
c	1		1

	a	b	c
a	1		
b	1	1	
c		1	1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c		1	1

Решението, което се предлага от упътването, води до същите осем матрици. Онзи начин на решаване би бил доста по-трудоемък, но при него дори неопитен човек би бил сигурен, че няма пропусната матрица. □