Второ контролно по ДС, спец. ИС, 11.11.2013 г.

Задача 8. Нека A и B са изброимо безкрайни множества. Проверете дали B^2, $(A \times B) \cup A$, $A \cap B$, $A \setminus B$ са изброимо безкрайни. Обосновете се!

Решение.

а) $B^2 = B \times B$ и изброимо безкрайно. Ще използваме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно. Нека $f : B \to \mathbb{N}$ е биекция и нека $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция. Тогава функцията
$$g : B \times B \to \mathbb{N},$$
определена като
$$g(x, y) = h(f(x), f(y)),$$
е биекция.

б) $(A \times B) \cup A$ е изброимо безкрайно. Аналогично на а), $A \times B$ е изброимо безкрайно. Тогава ние знаем от лекции, че обединение на две изброимо безкрайни множества е изброимо безкрайно. Да разгледаме само случая $A \times B \cap B = \emptyset$. Нека $f : \mathbb{N} \to A \times B$ и $g : \mathbb{N} \to B$ са биекции. Да определим $h : \mathbb{N} \to A \times B \cup B$ като $h(2n) = f(n)$ и $h(2n + 1) = g(n)$. Тогава h е биекция.

в) $A \cap B$ в общия случай не можем да твърдим, че е изброимо безкрайно. Например, ако вземем множествата A и B да бъдат такива, че $A \cap B = \emptyset$.

г) $A \setminus B$ в общия случай не можем да твърдим, че е изброимо безкрайно. Например, ако $A = B$, то $A \setminus B = \emptyset$.

□

Задача 9. За функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ намерете $f(X)$ и $f^{-1}(X)$, където:

1. $f(x) = x^2 + 1$ и $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
2. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ и $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
3. $f(x) = x^2 + 2$ и $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$;
4. $f(x) = \sqrt{x + 2}$ и $X = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$;

Решение.

1. $f(X) = \{1, 2, 5\}$, $f^{-1}(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in X\} = \{-1, 0, 1\}$.
2. $f(X) = \{-1, 0, 3\}$, $f^{-1}(X) = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.
3. $f(X) = \{2, 3, 6, 11\}$, $f^{-1}(X) = \{-1, 0, 1\}$.
4. $f(X) = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, $f^{-1}(X) = \{-2, -1\}$.

□

Задача 10. Нека е дадена функцията $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, определена като $f(x, y) = 2^x(2y + 1)$. Проверете дали е инективна.

Решение. Нека $\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle$ са двойки от естествени числа. Имаме три случая:

- $x \neq x' \wedge y = y'$. Тогава $2^x \neq 2^{x'}$ и следователно $2^x(2y+1) \neq 2^{x'}(2y+1)$. Тогава $f(x, y) \neq f(x', y')$.
- $x = x' \ \wedge \ y \neq y'$. Тогава $2y + 1 \neq 2y' + 2$ следователно $2^x(2y + 1) \neq 2^x(2y' + 1)$. Тогава $f(x, y) \neq f(x', y')$.
- $x \neq x' \ \wedge \ y \neq y'$. Без ограничение, нека $x < x'$, т.е. $x' = x + k$, $k > 0$. Тогава ако допуснем, че $f(x, y) = f(x', y')$, т.е. $2^x(2y+1) = 2^{x+k}(2y'+1)$, то $2y+1 = 2^k(2y'+1)$ и тогава имаме равенство на нечетно и на четно число $(k > 0)$, което очевидно е невъзможно.

$\square$

Задача 11. Нека е дадена функцията $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, определена като $f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$. Проверете дали е сюрективна.

Решение. Ще проверим, че за всяко $z \in \mathbb{N}$ съществуват $x, y \in \mathbb{N}$ такива, че $f(x, y) = z$. За 0 имаме, че $f(0, 0) = 0$. Нека $z > 1$. Ще докажем, че съществуват x, y такива, че $z = 2^x(2y + 1)$.

- Ако z е нечетно, т.е. $z = 2y + 1$, то $z = 2^0(2y + 1)$.
- Ако z е четно, то $2|z$ и тогава ще докажем, че

  $$(\exists k \geq 1)[2^k|z \ \wedge \ 2^{k+1} \not| z].$$

  Ако допуснем противното, то

  $$(\forall k \geq 1)[2^k \not| z \ \vee \ 2^{k+1}|z],$$

  което е еквивалентно на

  $$(\forall k \in\geq 1)[2^k|z \ \to \ 2^{k+1}|z],$$

  Тогава следва, че

  $$(\forall k \in \mathbb{N})[2^k|z].$$

  Но понеже $2^z > z$, то $2^z \not| z$, достигаме до противоречие. Следователно,

  $$(\exists k \in \mathbb{N})[2^k|z \ \wedge \ 2^{k+1} \not| z].$$

  Да вземем това k. Тогава $z = 2^k \cdot m$ и m е нечетно. Нека $m = 2y + 1$. Тогава $z = 2^k(2y + 1)$.

$\square$

Задача 12. Нека е дадена функцията $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена като $g(x, y) = x^2 - y^2$. Проверете дали е инективна и дали е биективна.

Решение. Очевидно не е инективна. Например, $g(0, 0) = g(1, 1)$. g е сюрективна, защото за $z \in \mathbb{R}$, ако $z \geq 0$, $g(\sqrt{z}, 0) = z$ и ако $z < 0$, $g(0, \sqrt{|z|}) = z$. $\square$

Задача 13. Нека е дадена функцията $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена като $g(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Проверете дали е инективна и дали е биективна.

Решение. Очевидно не е инективна. Например, $g(1, -1) = g(-1, 1)$. Също така е очевидно, че не е сюрективна, защото няка $z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, за което да има $x, y \in \mathbb{R}$ и $g(x, y) = z$. $\square$