Първо малко контролно по ДС на КН2, група 6

27.11.2023 г.

Име: .... ФН: ....

Забележка. В задачите *n-буквена дума* означава произволна редица от букви с дължина n.

Задача 1 (5 т.)**.** Нека $n \in \mathbb{N}$. Колко са n-буквените думи, съставени само от буквите a, b, c и d, в които няма две последователни срещания на буквата a?

Задача 2 (5 т.)**.** Колко са 6-буквените думи, съставени само от буквите a, b, c и d, в които никоя от буквите не се среща точно по два пъти?

Примерно решение на задача 1. Решаваме задачата,като съставяме рекурентно уравнение. Означаваме търсения брой с a_n. Множеството от възможностите се разбива на две части:

1. Буквата на позиция n не е a. Този случай сам по себе си се разбива на три, тъй като буквата на позиция n може да е b, c или d. И в трите подслучая задачата опира до това да се намери a_{n-1}, така че броят на възможностите тук е $3a_{n-1}$.

2. Буквата на позиция n е a. Тогава буквата на позиция $n-1$ (предполагаме, че n е достатъчно голямо) не е a. Така този случай също се разбива на три, като и в трите задачата опира до това да се намери a_{n-2}. Значи възможностите тук са $3a_{n-2}$.

Рекурентното уравнение е $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$, а характеристичното уравнение е $x^2 - 3x - 3 = 0$ с мултимножеството от корените $\{\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\}_M$. Значи

$$a_n = c_1 \left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

Намираме началните условия $a_0 = 1$ и $a_1 = 4$, откъдето пресмятаме $c_1 = \frac{21-5\sqrt{21}}{42}$ и $c_2 = \frac{21+5\sqrt{21}}{42}$.

Примерно решение на задача 2. В решението *дума* означава 6-буквена дума, съставена само от буквите a, b, c и d. Решаваме задачата, като използваме принципа на включването и изключването. Нека S е множеството от всевъзможните думи, а S_a, S_b, S_c и S_d са съответно множествата от точно тези думи, в които a, b, c и d се срещат точно по два пъти. Тогава множеството от думите, в които някоя от буквите се среща точно два пъти, е $S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d$. Означаваме това обединение с S^*. Търсения брой намираме, като от $|S|$ извадим $|S^*|$. Ясно е, че $|S| = 4^6$. Имаме

$$
\begin{gathered}
|S^*| = |S_a| + |S_b| + |S_c| + |S_d| - \\
|S_a \cap S_b| - |S_a \cap S_c| - |S_a \cap S_d| - |S_b \cap S_c| - |S_b \cap S_d| - |S_c \cap S_d| + \\
|S_a \cap S_b \cap S_c| + |S_a \cap S_b \cap S_d| + |S_a \cap S_c \cap S_d| + |S_b \cap S_c \cap S_d| - \\
|S_a \cap S_b \cap S_c \cap S_d|.
\end{gathered}
$$

Пресмятаме $|S_a| = |S_b| = |S_c| = |S_d| = \binom{6}{2}3^4$, като интуицията тук е, че трябва да се изберат 2 позиции, на които да стои конкретната буква, а на всяка от останалите позиции може да стои коя да е от останалите букви. По аналогичен начин получаваме $|S_a \cap S_b| = |S_a \cap S_c| = |S_a \cap S_d| = |S_b \cap S_c| = |S_b \cap S_d| = |S_c \cap S_d| = \binom{6}{2}\binom{4}{2}3^2$, както и $|S_a \cap S_b \cap S_c| = |S_a \cap S_b \cap S_d| = |S_a \cap S_c \cap S_d| = |S_b \cap S_c \cap S_d| = \binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}3^0$. Накрая съобразяваме, че $|S_a \cap S_b \cap S_c \cap S_d| = 0$, защото не може всяка от 4 букви да се среща точно по два пъти в 6-буквена дума. Отговорът е $|S| - |S^*| = 4^6 - 4\binom{6}{2}3^4 + 6\binom{6}{2}\binom{4}{2}2^2 - 4\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 1036$.