

Второ малко контролно по ДС на КН2, група 6

8.01.2023 г.

Име:

ФН:

Задача 1 (5 т.). Нека $T = (V, E)$ е дърво и $\deg(v) = 13$ за всеки $v \in V$, който не е висящ. Да се докаже, че в T висящите върхове са повече от невисящите.

Задача 2 (5 т.). Нека $G = (V, E)$ е свързан граф и $\deg(v) = 42$ за всеки $v \in V$. Да се докаже, че няма такава $e \in E$, че графът $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ не е свързан.

Примерно решение на задача 1. Нека P е множеството от висящите върхове на T и $|P| = k$. Тогава $V \setminus P$ е множеството от невисящите върхове на T и $|V \setminus P| = n - k$. Имаме $2m = 2(n - 1) = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in P} \deg(v) + \sum_{v \in V \setminus P} \deg(v) = k + 13(n - k)$, откъдето получаваме $k = 11(n - k) + 2$. Следователно $k > n - k$.

Примерно решение на задача 2. Допускаме, че такова ребро има. Нека $v, w \in V$ са такива, че $(v, w) \in E$ и $G' = G - (v, w)$ не е свързан. Ясно е, че щом G е свързан, а G' не е, то G' има точно две свързани компоненти. Нека H е една от тях и $|V(H)| = k$. Тогава H има $k - 1$ върха от степен 42 и един връх от степен 41, но както знаем, броят на върховете от нечетна степен в кой да е граф е четно число. С допускането стигнахме до абсурд. Значи такива ребра няма.