2.11 Теорема за редукцията

В доказателството на теоремата за дедукцията съществено използвахме това, че формулата, която прибавяме като нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$ е затворена. В общия случай е в сила следната теорема.

Теорема 2.36 (За редукцията)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и Γ е множество от формули на $\mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{F}$ е в сила $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{B}$ тогава и само тогава, когато съществува $k \geqslant 0$ и универсални затваряния $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ на формули от Γ, такива че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}.$$

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$, където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ са универсални затваряния на формулите $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$ от Γ. Тогава, тъй като $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}[\Gamma]$, то $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$. При това $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}'_i$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_i$ (всяка формула е равнодоказуема с кое да е свое универсално затваряне) и следователно $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{B}$ съгласно (TT).

Обратно, нека $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{B}$. Нека $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$ са формулите от Γ, които се използват като аксиоми в дадено доказателство на $\mathbf{B}$ в $\mathcal{F}[\Gamma]$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n]} \mathbf{B}.$$

Нека $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ са универсални затваряния на $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$. Тогава, тъй като всяка формула е равнодоказуема с кое да е свое универсално затваряне, в сила е

$$\mathcal{F}[\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n] \subseteq \mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$$

и следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]} \mathbf{B}.$$

Оттук и теормета за дедукцията

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}.$$

□

2.12 Противоречиви и непротиворечиви формални системи

Ще казваме, че една формална система $\mathcal{F}$ е *противоречива*, ако

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \text{ и } \vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$$

за някоя формула $\mathbf{A}$. В противен случай казваме, че $\mathcal{F}$ е *непротиворечива*. Следващото твърдение дава три еквивалентни формулировки на понятието противоречивост.

Твърдение 2.37. Нека $\mathcal{F}$ е формална система. Следните условия са еквивалентни:

(i) $\mathcal{F}$ е противоречива;

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{A}$ за някоя формула $\mathbf{A}$;

(iii) $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$ за всяка формула $\mathbf{B}$.

Доказателство. Очевидно от (iii) следва (ii), а от (ii) следва (i). Нека сега е вярно (i), т.е. $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$ за някоя формула $\mathbf{A}$, и нека $\mathbf{B}$ е произволна формула. Тогава, тъй като $\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е тавтология, съгласно теоремата за тавтологиите $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$.

□

Теорема 2.38 (Теорема за редукцията за противоречивост)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и Γ е непразно множество от формули на $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{F}[\Gamma]$ е противоречива тогава и само тогава, когато

$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n,$$

за някои затваряния $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ на формули от Γ.

Доказателство. Нека първо
$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n,$$
където $\mathbf{A}_1,\ldots,\ \mathbf{A}_n$ са затваряния на формулите $\mathbf{A}'_1,\ldots,\ \mathbf{A}'_n$ на Γ. Съгласно теоремата за универсалното затваряне $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. От друга страна
$$\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_{n-1} \to \mathbf{A}_n,$$
откъдето $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_n$ и значи $\mathcal{F}[\Gamma]$ е противоречива.

Нека сега $\mathcal{F}[\Gamma]$ е противоречива. Оттук и теоремата за редукцията
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to x \neq x,$$
където $\mathbf{A}_1,\ldots,\ \mathbf{A}_n$ са затваряния на формули от Γ. Следователно съгласно теоремата за тавтологиите
$$\vdash_{\mathcal{F}} x = x \to (\neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n),$$
откъдето
$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_n.$$
□

Следствие 2.39. Нека **A** е затворена формула на $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ е непротиворечива тогава и само тогава, когато $\nvdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$.